

# Versuch P1-53,54,55 – Vierpole und Leitungen

# Vorbereitung

Von Jan Oertlin

8. Dezember 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Vierpole und sinusförmige Wechselspannungen.....</b>	<b>2</b>
1.1. Hochpass.....	2
1.2. Tiefpass.....	3
<b>2. Vierpole und Dreieck- und Rechteckwechselspannung.....</b>	<b>3</b>
2.1. Differenzierglied (Hochpass und Dreieckspannung).....	3
2.2. Integrierglied (Tiefpass und Rechteckspannung).....	3
2.3. Weitere Untersuchungen.....	3
<b>3. Drosselkette.....</b>	<b>4</b>
3.1. Charakteristische Widerstand.....	4
3.2. Bestimmung der Grenzfrequenz $f_0$ .....	4
3.3. Kapazität und Induktivität.....	5
3.4. Phasenverschiebung.....	5
3.5. Erzwungene Reflexion am Kettenende.....	5
<b>4. Koaxialkabel.....</b>	<b>6</b>
4.1. Charakteristische Widerstand.....	6
4.2. Verzögerungszeit $\tau'$ .....	6
4.3. Verzögerungszeit $\tau'$ durch Überlagerung.....	6
4.4. Dielektrizitätskonstante.....	6

# 1. Vierpole und sinusförmige Wechselspannungen

Vierpole sind elektrische Bauteile mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen. In dieser Aufgabe werden R-C-Spannungsteiler behandelt, die, wie der Name schon vermuten lässt, aus einem Widerstand und einem Kondensator bestehen. Da dies lineare Netzwerke sind, gilt die Beziehung:

$$U = Z \cdot I$$

Wobei  $Z$  der Widerstand in komplexer Form ist.

## 1.1. Hochpass

Ein Hochpass kann zum herausfiltern von niedrigen Frequenzen von Wechselspannung dienen. Dieser lässt Wechselspannungen mit hoher Frequenz fast ungestört „passieren“, wobei niedrige Frequenzen fast vollständig gedämpft werden.

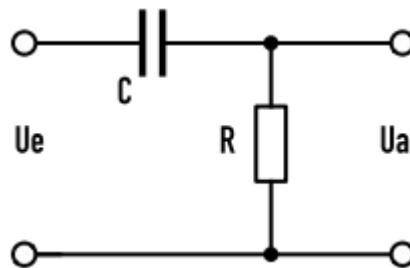


Abb. 1: Hochpass<sup>1</sup>

Laut Kirchhoffscher Regel gilt für die Ausgangsspannung  $u_a$ :

$$u_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \cdot u_e$$

Man erhält durch erweitern mit dem komplex Konjugiertem:

$$|u_a| = \frac{\omega R C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot |u_e|$$

Es ergibt sich:

$$\frac{|u_a|}{|u_e|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\omega R C)^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2\pi f R C)^2} + 1}} \stackrel{f_0 = 1/2\pi R C}{=} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 + 1}}$$

Für die Phasenverschiebung ergibt sich:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta \varphi}{360^\circ} \Leftrightarrow \Delta \varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360^\circ$$

Sowohl  $|u_a|/|u_e|$  also auch  $\Delta \varphi$  werden in Diagrammen über  $\log(f/f_0)$  aufgetragen.

<sup>1</sup> <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5a/Hochpass.svg>, 9.12.2009, 16:37 Uhr

## 1.2. Tiefpass

Ein Tiefpass macht gerade das Gegenteil von einem Hochpass. Hier können ungehindert tiefere Frequenzen „durchkommen“, wobei hohe Frequenzen stark gedämpft werden.

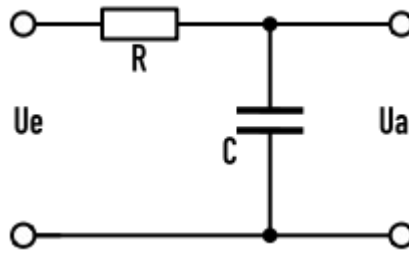


Abb. 2: Tiefpass<sup>2</sup>

Hier werden dann die gleichen Messungen durchgeführt wie in **Aufgabe 1.1.**

## 2. Vierpole und Dreieck- und Rechteckwechselspannung

### 2.1. Differenzierglied (Hochpass und Dreieckspannung)

Wir legen nun an den Hochpass aus **Aufgabe 1.1.** eine dreieckförmige Wechselspannung an und beobachten  $u_a$ . Ist  $f/f_0 \ll 1$  kann man von einem *Differenzierglied* sprechen.

Dies ergibt sich aus folgendem Zusammenhang:

$$u_a = R \cdot \frac{dQ}{dt} \approx R \cdot C \cdot \frac{du_e}{dt}$$

Diese Näherung gilt nur, solange der Kondensatorstrom nicht groß wird und somit kaum etwas beiträgt.

Wir erwarten also an  $u_a$  eine Rechteckspannung.

### 2.2. Integrierglied (Tiefpass und Rechteckspannung)

Hier legen wir an einen Tiefpass eine Rechteckspannung an und beobachten  $u_a$ . Für  $f/f_0 \ll 1$  kann man von einem *Integrierglied* sprechen. Dies ergibt sich aus folgendem Zusammenhang:

$$u_a = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{RC} \int (u_e - u_a) dt$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist:

$$u_a = -u_e e^{-\frac{1}{RC}t} + u_e$$

Wir erwarten also für  $u_a$  eine Dreieckspannung.

### 2.3. Weitere Untersuchungen

Hier sollen zum Beispiel die **Aufgaben 2.1.** bzw. **2.2.** mit Rechteckspann bzw. Dreieckspannung durchgeführt werden.

<sup>2</sup> <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e8/Tiefpass.svg>, 9.12.2009, 16:39 Uhr

### 3. Drosselkette

Eine Drosselkette besteht aus vielen hintereinander geschalteten L-C-Vierpolen.

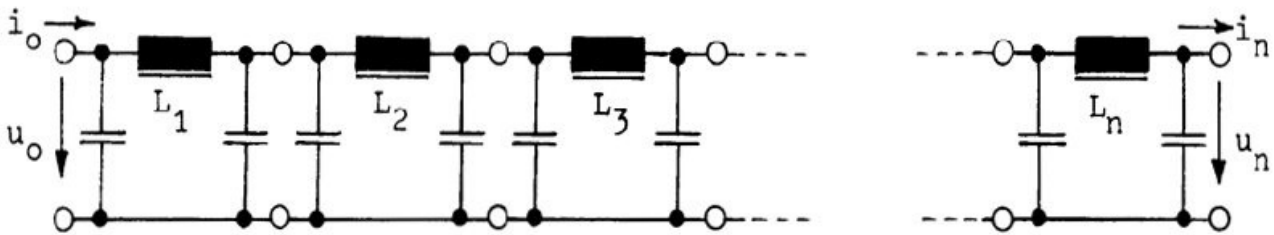


Abb. 3: Drosselkette<sup>3</sup>

#### 3.1. Charakteristische Widerstand

Hier soll der charakteristische Widerstand  $Z_0$  für  $f \ll f_0$  einer sechsgliedrigen Kette bestimmt werden. Dabei legen wir eine Rechteckwechselfspannung mit relativ niedriger Frequenz an und beobachten das Eingangssignal am Oszilloskop. Den regelbaren Lastwiderstand  $Z_A$  stellen wir so ein, dass die Rechteckspannung möglichst wenig verfälscht wird. Dann gilt  $Z_0 \approx Z_A$ .

Es gilt für  $Z_0$  der folgende Zusammenhang:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right)^{-1}$$

Mit  $\omega_0 = 2 \cdot (\sqrt{LC})^{-1}$ .

Für  $\omega \ll \omega_0$  gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

#### 3.2. Bestimmung der Grenzfrequenz $f_0$

Wir legen an eine Drosselkette eine sinusförmige Wechselfspannung an, stellen den Lastenwiderstand auf  $Z_0$  ein und beobachten die Eingangsspannung. Nachdem wir uns nun überzeugt haben, dass der Generator eine frequenzunabhängige Spannung liefert, erhöhen wir die Frequenz und beobachten dabei die Ausgangsspannung. Dabei müssen wir den Lastenwiderstand entsprechend der theoretischen Frequenzabhängigkeit nachregeln.

Wir suchen  $f_0$  und werden in dem Frequenzbereich fündig, in der sich  $u_a$  stark mit  $f$  ändert.

Die Grenzfrequenz  $f_0$  definiert man auch an der Stelle, an der das folgendes gilt:

$$\frac{|u_a|}{|u_e|} = 0,1$$

<sup>3</sup> Der Vorbereitungshilfe entnommen

### 3.3. Kapazität und Induktivität

Wir vergleichen die berechnete Kapazität und Induktivität jedes Baugliedes mit den angegebenen Daten des Elements.

Aus **Aufgabe 3.1.** haben wir

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

und

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}\pi}$$

Daraus ergibt sich für  $C$  und  $L$ :

$$C = \frac{1}{\pi Z_0 f_0}$$

$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0}$$

### 3.4. Phasenverschiebung

Hier sollen wir die Phasenverschiebung mittels einem Zweikanaloszilloskops zwischen Eingangs- und Ausgangssignal in Abhängigkeit der Frequenz untersucht werden. Dies soll für ein einzelnes  $\pi$ -Glied als auch für die ganze Kette durchgeführt werden. Hierbei muss wieder der Lastenwiderstand entsprechend eingestellt werden.

Aus der zeitlichen Verschiebung (die man am Oszilloskop ablesen kann) soll nun die Verschiebung in Bogenmaß berechnet werden.

Anschließend sollen wir uns davon überzeugen, dass die Phasenverschiebung über ein Glied gerade  $\pi$  beträgt, über zwei Glieder  $2\pi$  usw.

Danach suchen wir die Frequenzen, bei denen die Phasenverschiebung der ganzen Kette  $\pi$  bis  $5\pi$  beträgt. Daraus sollen wir nochmals  $f_0$  bestimmen. Dies geschieht über folgenden Zusammenhang:

$$f_0 = \frac{f}{\sin \frac{k\pi}{2n}}$$

Wobei  $n$  die Anzahl der Glieder in der Drosselkette ist.

### 3.5. Erzwungene Reflexion am Kettenende

Um eine Reflexion am Kettenende zu erzwingen, muss der Lastenwiderstand verschwinden. Am Kettenanfang wollen wir Reflexionen vermeiden. Am Kettenanfang erwarten wir eine Überlagerung durch das reflektierte Signal.

## 4. Koaxialkabel

Nun setzen wir für die weiteren Versuche ein Koaxialkabel ein anstatt einer Drosselkette.

### 4.1. Charakteristische Widerstand

Dieser Versuch wird analog zu **Aufgabe 3.1.** durchgeführt.  $Z_0$  darf als frequenzunabhängig angenommen werden, da die Verluste im Kabel sehr gering sind.

### 4.2. Verzögerungszeit $\tau'$

Hier bestimmen wir die Verzögerungszeit  $\tau'$  pro Längeneinheit des Kabels durch gleichzeitige Beobachtung des Eingangs- und Ausgangsspannung am Oszilloskop.

$\tau'$  ist gegeben durch:

$$\tau' = \frac{\Delta t}{l}$$

Wobei  $\Delta t$  die Signalverzögerung ist.

### 4.3. Verzögerungszeit $\tau'$ durch Überlagerung

Hier soll wieder der gleiche Wert wie in **Aufgabe 4.2.** bestimmt werden, aber diesmal mit einem alternativen Verfahren analog zu **Aufgabe 3.5.:** Wir beobachten die Überlagerung des Eingangs- mit dem reflektierten Signal.

### 4.4. Dielektrizitätskonstante

Hier bestimmen wir die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  auf unterschiedliche Weisen.

$$1. \quad \epsilon(C_l, r_a, r_i) = \frac{C}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

$$2. \quad \epsilon(\tau') = \frac{(c\tau')^2}{\mu_r}$$

$$3. \quad \epsilon(Z_0, r_i, r_a) = \frac{c^2 \mu_0^2 \mu_r}{4\pi^2 Z_0^2} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$