Versuch P1-72,74,75
Bestimmung von e/m des Elektrons

Auswertung

Von Ingo Medebach und Jan Oertlin

2. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

1. e/m - Bestimmung mit dem Fadenstrahlrohr

1.1. (Hallspannung)

Wir haben die Hallspannung an den vorgegebenen Messpunkten (MP) bei den Spulenströmen $I = 1$, 1.5 und 2 A gemessen. Die Messpunkte liegen ungefähr wie in Abbildung 1 in der Spule:

MP \ *I* in A	1	1,5	2
1	0,097 mV	0,145 mV	0,190 mV
2	0,101 mV	0,150 mV	0,205 mV
3	0,101 mV	0,155 mV	0,205 mV
4	0,100 mV	0,155 mV	0,205 mV
5	0,100 mV	0,155 mV	0,205 mV
6	0,098 mV	0,150 mV	0,205 mV
7	0,093 mV	0,150 mV	0,195 mV
8	0,079 mV	0,120 mV	0,160 mV
9	0,098 mV	0,155 mV	0,200 mV
10	0,098 mV	0,155 mV	0,205 mV
11	0,095 mV	0,155 mV	0,200 mV
12	0,094 mV	0,150 mV	0,200 mV

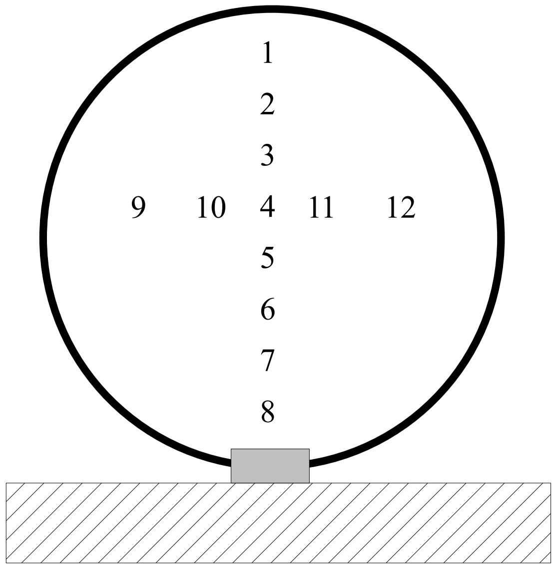
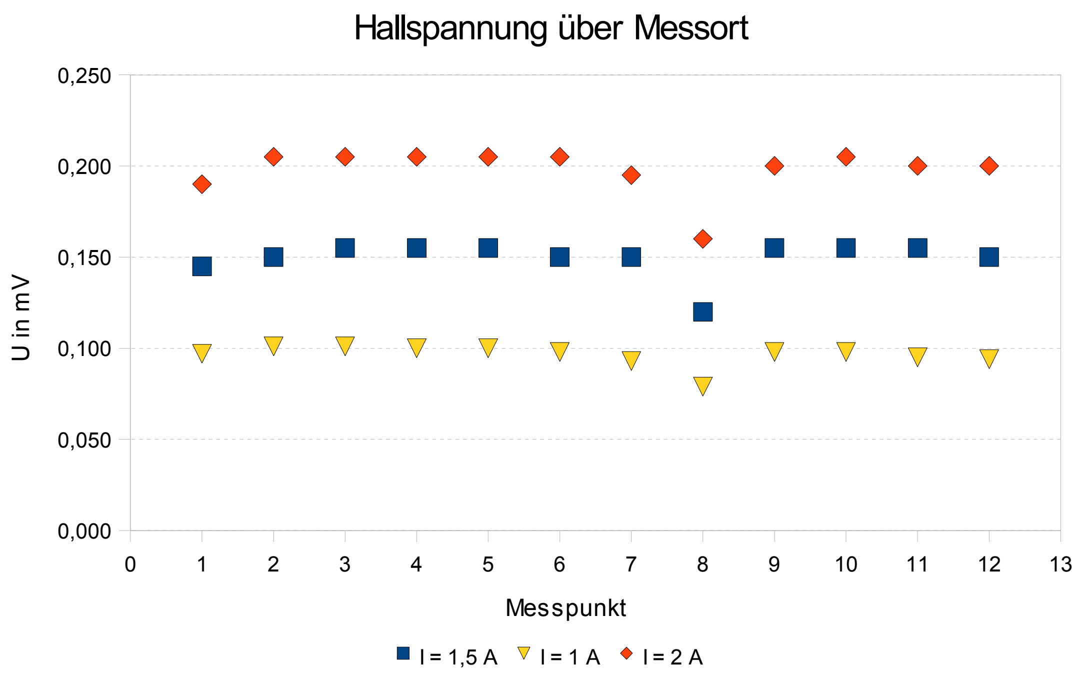


Abb. 1: Messpunktlage

Nun haben wir noch die Messdaten in einem Diagramm Hallspannung über dem Messort aufbereitet:

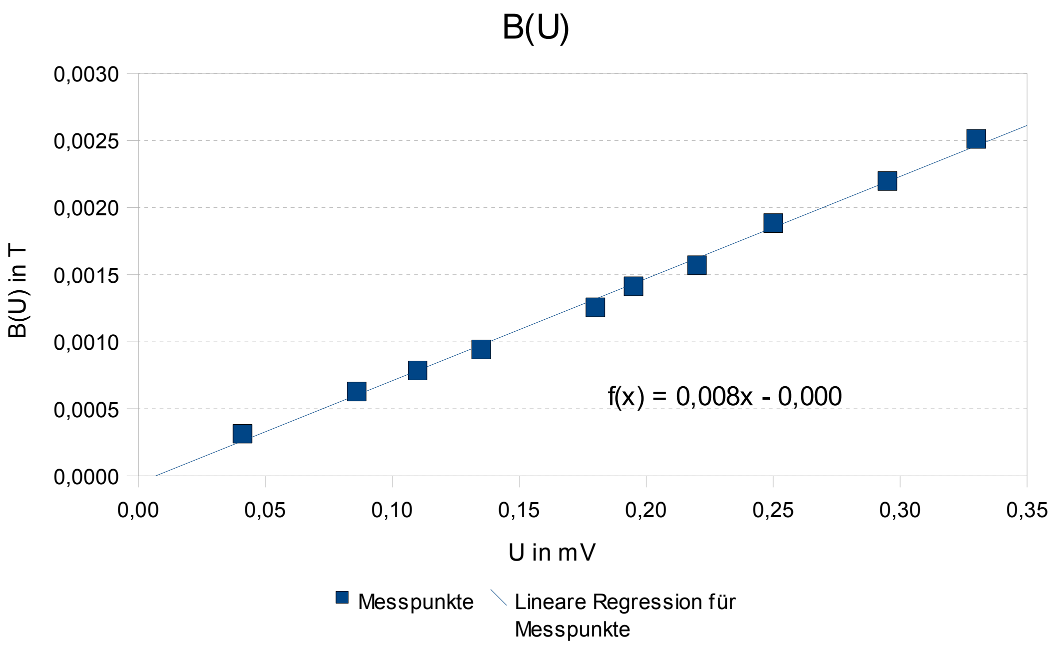


1.2. Eichen der Hallsonde

Hier haben wir mit unsere Hallsonde das *B*-Feld einer langen Eichspule bei verschiedenen Strömen *I* gemessen.

Wir haben uns aus den Daten die lineare Regression errechnen lassen.

Die Steigung wäre $k = 0{,}008 \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$.



1.3. Vergleich von Berechnung und Messung

Für den Vergleich zwischen berechnetem und gemessenem Magnetfeld (**Aufgabe 1.1.**), wählen wir für die Messwerte einen möglichst homogenen Bereich. Wir haben dazu die Messpunkte Drei bis Fünf genommen.

Das Magnetfeld lässt sich durch die Konstante *k*, die wir in **Aufgabe 1.2.** bestimmt haben, berechnen.

Es ergibt sich die folgende Tabelle:

	Gemessen			Berechnet			Abweichung		
MP \ ***I* in A**	**1**	**1,5**	**2**	**1**	**1,5**	**2**	**1**	**1,5**	**2**
3	0,808	1,240	1,640				3,56 %	5,74 %	4,97 %
4	0,800	1,240	1,640	0,779	1,169	1,558	2,59 %	5,74 %	4,97 %
5	0,800	1,240	1,640				2,59 %	5,74 %	4,97 %
	in mT								

Wie man sehen kann, liegen die gemessenen Werte den berechneten recht nahe.

1.4. Elektronenkreisbahn

1.4.1. Statistische Fehlerrechnung

Für die Gerade $f(x)=G+M\cdot x$ der lineare Regression haben wir folgende Formel für *G* und *M* aus der „Einführung zur Fehlerrechnung im Praktikum“ entnommen:

$$G=\frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right)-\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{\Delta}$$

$$M=\frac{N\cdot\left(\sum x_i y_i\right)-\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\Delta}$$

Mit $\Delta=N\cdot\left(\sum x_i^2\right)-\left(\sum x_i\right)^2$.

Um den statistischen Fehler für die Regressionsgerade zu berechnen, benutzen wir folgende Formel:

$$\sigma_M^{\text{stat}}=\sqrt{\frac{\sum (y_i-G-M\,x_i)^2 N}{(N-2)\left[N\sum x_i^2-\left[\sum x_i\right]^2\right]}}$$

Der statistische Fehler der Steigung *M* pflanzt sich in *e/m* fort. Es ergibt sich:

$$\Delta_{e/m}=\frac{\Delta_M}{M}\frac{e}{m}$$

1.4.2. Systematische Fehlerrechnung

Für den systematischen Fehler nehmen wir die Größtfehlerabschätzung:

$$\Delta_{e/m}=\left|\frac{\partial e/m}{\partial U_{\text{A}}}\right|\Delta_{U_{\text{A}}}+\left|\frac{\partial e/m}{\partial I}\right|\Delta_I+\left|\frac{\partial e/m}{\partial d}\right|\Delta_d$$

$$\Delta_{e/m}=\frac{e}{m}\frac{1}{U_{\text{A}}}\Delta_{U_{\text{A}}}+2\frac{e}{m}\frac{1}{I}\Delta_I+2\frac{e}{m}\frac{1}{d}\Delta_d$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\Delta_{e/m}}{e/m}=\frac{\Delta_{U_{\text{A}}}}{U_{\text{A}}}+2\frac{\Delta_I}{I}+2\frac{\Delta_d}{d}$$

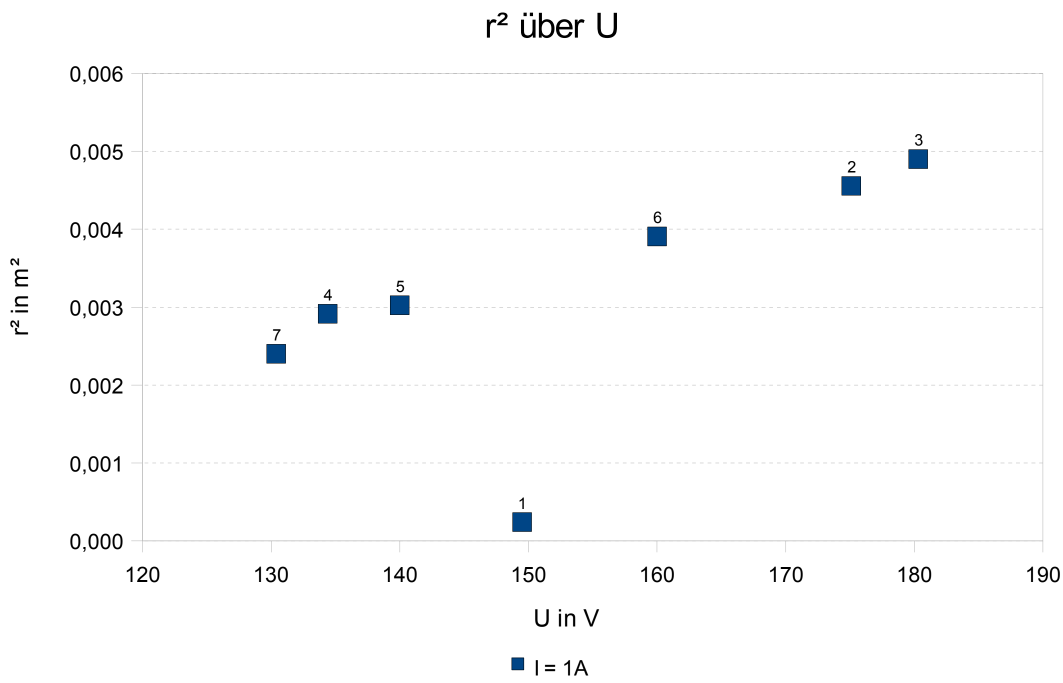
Zum Bestimmen der Fehler haben wir folgende Messungenauigkeiten angenommen:

- $\Delta_{U_{\text{A}}}/U_{\text{A}}=1\,\%$
- $\Delta_I/I=1\,\%$
- $\Delta_d=0{,}5\,\text{cm}$ für den Durchmesser *d*. Die Messung des Durchmessers war mit der etwas wackligen Halterung und den doch sehr losen verschiebbaren Markierungen nicht sehr genau durchzuführen.

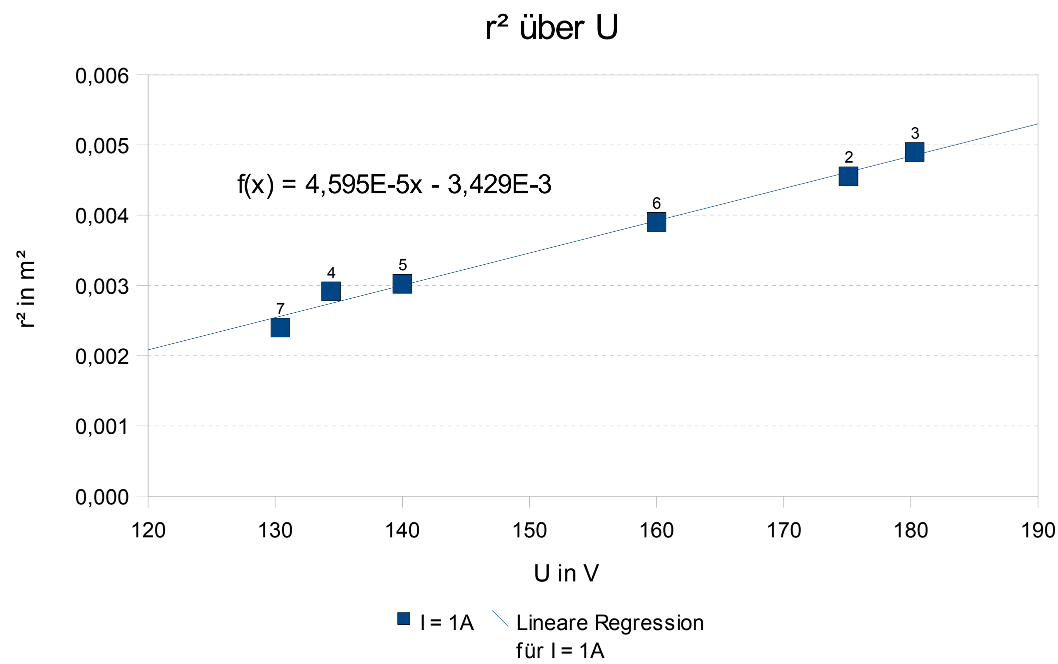
Zur Berechnung von Δ_d/d wurde über die Fehler aller gemessenen Durchmesser gemittelt. Es ergibt sich für $\Delta_d/d=0{,}063$.

1.4.3. In Abhängigkeit der Anodenspannung

Hier wurden die Durchmesser der Elektronenkreisbahnen in Abhängigkeit der Anodenspannung bei zwei Spulenströmen gemessen.



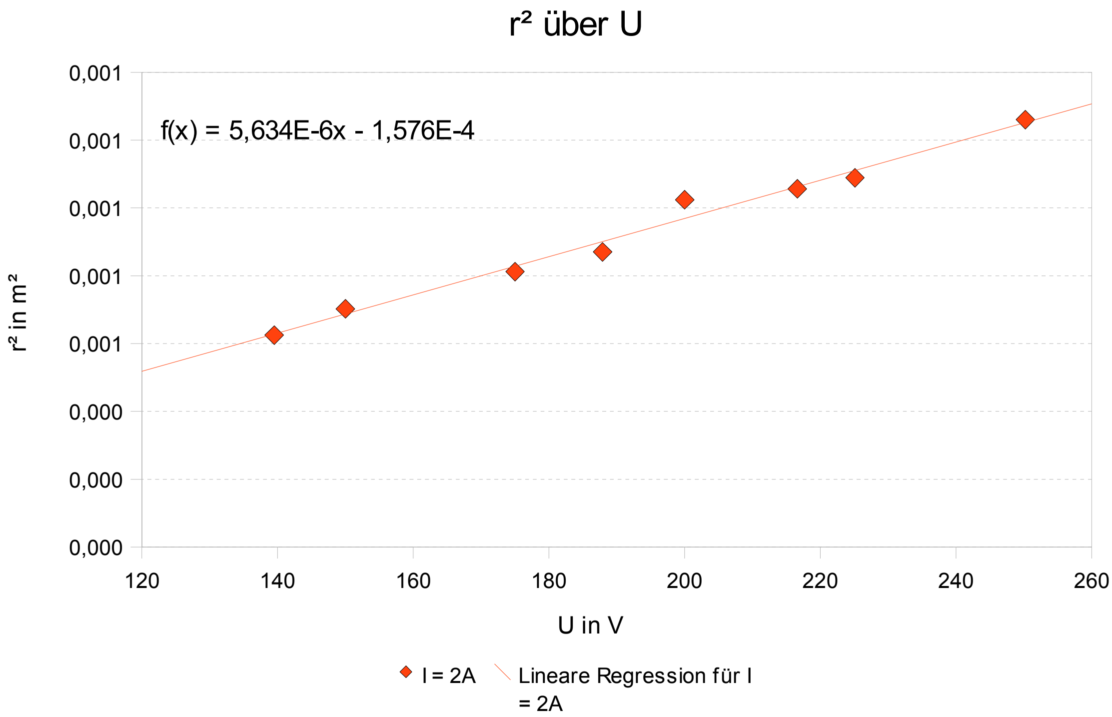
Der Messpunkt 1 war der erste gemessene Wert bei uns. Wir hatten dort das Problem, dass wir im Fadenstrahlrohr nur eine „Wolke“ gesehen haben und deren Radius aufgenommen haben. Bei den anderen Werten hatten wir richtige Ringe. Deshalb verwerfen wir den Messpunkt 1.



Aus der Vorbereitung entnehmen wir:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2}$$

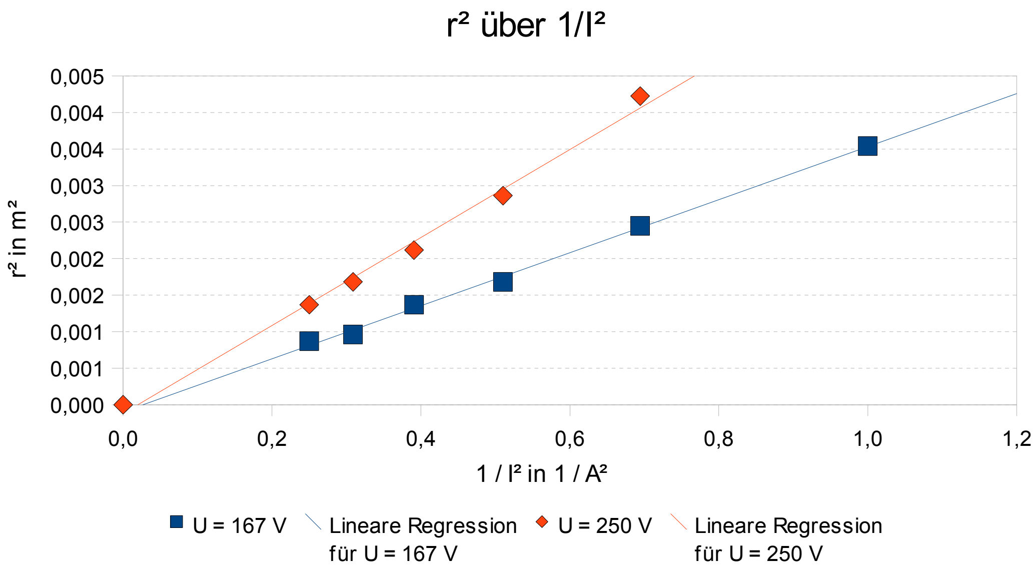
Man erkennt hier, wie erwartet, eine $U \sim r^2$ Proportionalität.



Hier erkennt man die Linearität besser.

1.4.4. In Abhängigkeit vom Spulenstrom

Jetzt wurden die Durchmesser der Elektronenkreisbahnen in Abhängigkeit vom Spulenstrom bei zwei Anodenspannungen gemessen.



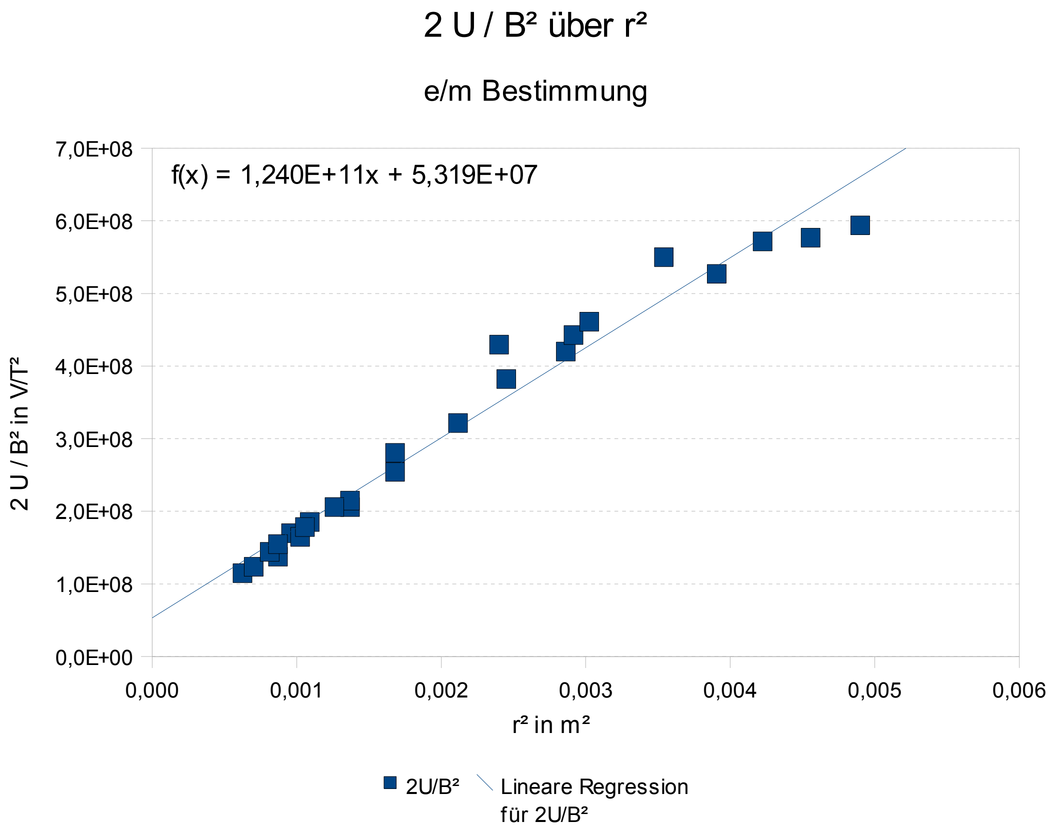
Auch hier erkennt man eine Linearität.

Nun tragen wir alle Messdaten in ein passendes Koordinatensystem ein.

Dazu verwenden wir:

$$\frac{e}{m}=\frac{2U_A}{B^2 r^2} \Leftrightarrow r^2\frac{e}{m}=\frac{2U_A}{B^2}=2U_A\left(0{,}7155\cdot 4\pi\, 10^{-7}\cdot I\,\frac{n}{R}\right)^{-2}$$

Wir tragen jetzt $\frac{2U_A}{B^2}$ über r^2 auf und die Steigung sollte unser *e/m* Wert sein.



$$\sigma_M^{\text{stat}}=1{,}317\cdot 10^8\ \frac{\text{C}}{\text{kg}}\ ,\ \frac{\Delta_{e/m}}{e/m}=0{,}156\ \Rightarrow\ \frac{e}{m}=(1{,}240\pm 0{,}001\pm 0{,}193)\cdot 10^{11}\frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

Die Schwierigkeit bei diesem Versuch war es, sowohl den Durchmesser der Elektronenbahn zu messen, als auch den eingestellten Strom abzulesen.

Bei Ersterem haben wir schon weiter oben kurz die Problematik angesprochen, dass die Halterung nicht optimal ist. Evtl. würde es sich auch anbieten, eine Halterung mit aufgedruckter Skalierung zu benutzen anstatt des Geodreiecks.

Beim Messgerät für den Strom hatten wir das Problem, dass der Zeiger etwas verbogen war, weshalb es sich als schwer erwies, den Strom genau abzulesen. Außerdem wichen die angezeigten Werte, je nach Messbereich, merkbar voneinander ab.

2. e/m - Bestimmung nach Busch

2.1. Vorbereitung

Wir haben hier wie in der Aufgabenstellung $U_A = 500$ V gewählt.

Beobachtungen:

1. **Magnetfeld: aus**

   Wir haben die Deflektorspannung erhöht (Wechselspannung). Dadurch haben wir auf dem Schirm keinen Punkt, sondern nun einen Strich gesehen, der mit der Deflektorspannung größer wurde.

   Der Strich entsteht, weil durch die angelegte Wechselspannung der Elektronenstrahl mit dem (sinusförmigen) Verlauf der Spannung mal stärker, mal schwächer und in entgegengesetzter Richtung abgelenkt wird. Da dies mehrmals pro Sekunde passiert, sehen wir einen Strich auf dem Schirm.

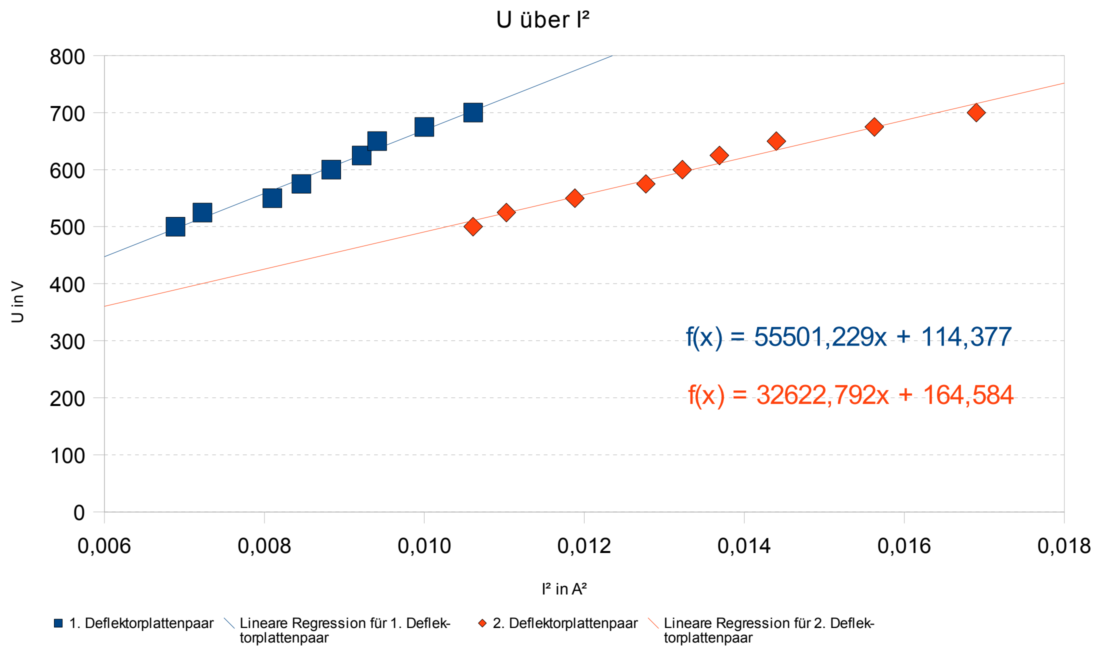
2. **Magnetfeld: ein**

   Jetzt erhöhen wir den Strom I_L der Spule langsam. Der Strich dreht sich und wird kürzer. Bei einem Strom von ca. 0,083 A sehen wir nur noch einen Punkt. Durch leichtes erhöhen wird der Punkt wieder zu einem Strich und theoretisch auch nach weiterem Erhöhen erneut zu einem Punkt. Bei diesem Strom fliegen die Elektronen zwei komplette Schrauben.

Diese Beobachtungen entsprechen unseren Erwartungen aus der Vorbereitung.

2.2. Ermittlung von e/m

Nun wollen wir mit diesem Versuchsaufbau *e/m* ermitteln. Dies geschieht so, in dem wir die Anodenspannung *U* über den Spulenstrom I^2 aufgetragen und aus der Steigung den *e/m* - Wert bestimmen.



Es gilt für U:

$$U=\frac{e}{m}\frac{d^2}{8\pi^2}B^2$$

Mit $B=k_i \cdot I$ ergibt sich:

$$U=\frac{e}{m}\frac{d_i^2}{8\pi^2}k_i^2 I^2$$

Damit ist die Steigung M gegeben durch:

$$M=\frac{e}{m}\frac{d_i^2}{8\pi^2}k_i^2$$

Es gilt weiterhin:

$$\overline{B}=\frac{k}{L}\cdot I=\frac{1}{d_i-s}\ \frac{\mu_0 n I}{2L}\int_{d_i}^{s}\mathrm{d}a\ \left(\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}+\frac{L-a}{\sqrt{R^2+(L-a)^2}}\right)$$

$$k(d_i)=\frac{1}{2(d_i-s)}\mu_0 n\left[\sqrt{R^2+a^2}-\sqrt{R^2+(L-a)^2}\right]_{d_i}^{s}$$

$$k(d_i)=\frac{1}{2(d_i-s)}\mu_0 n\left(\sqrt{R^2+s^2}-\sqrt{R^2+(L-s)^2}-\sqrt{R^2+d_i^2}+\sqrt{R^2+(L-d_i)^2}\right)$$

2.2.1. Statistische Fehlerrechnung

Bei der Steigung aus der Regressionsgrade haben wir einen statistischen Fehler.

Dieser wird so berechnet (siehe auch **1.4.1.**):

$$\Delta_M=\sigma_M=\sqrt{\frac{\sigma_y}{\Delta}N}$$

mit

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{1}{N}\sum(y_i-G-M\cdot x_i)^2}$$

und

$$\Delta=N\cdot\left(\sum x_i^2\right)-\left(\sum x_i\right)^2$$

Wobei y_i bei uns die Spannungswerte U_i und x_i die Stromstärken I_i^2 sind. G ist der Y-Achsen-abschnitt der Regressionsgraden und M deren Steigung.

Also:

$$\Delta_{e/m}=\sqrt{\left|\frac{\partial e/m}{\partial M}\right|^2(\Delta_M)^2}=\left|8\pi^2\frac{L^2}{d_i^2 k_i^2}\right|\cdot\Delta_{M_i}$$

2.2.2. Systematische Fehlerrechnung

Wir müssen folgende Größen als Fehlerquellen beachten: I, U, d_i und L

Wir benutzen:

$$\frac{e}{m}=\frac{8\pi^2 U L^2}{d_i^2 k_i^2 I^2}$$

Daraus folgt:

$$\Delta_{e/m}=\left|\frac{\partial e/m}{\partial I}\right|\Delta_I+\left|\frac{\partial e/m}{\partial U}\right|\Delta_U+\left|\frac{\partial e/m}{\partial d_i}\right|\Delta_d+\left|\frac{\partial e/m}{\partial L}\right|\Delta_L$$

$$\Rightarrow\ \Delta_{e/m}=2\frac{e}{m}\frac{\Delta_I}{I}+\frac{e}{m}\frac{\Delta_U}{U}+2\frac{e}{m}\frac{\Delta_d}{d}+2\frac{e}{m}\frac{\Delta_L}{L}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\Delta_{e/m}}{e/m}=2\frac{\Delta_I}{I}+\frac{\Delta_U}{U}+2\frac{\Delta_d}{d_i}+2\frac{\Delta_L}{L}$$

Für die Fehlerberechnung haben wir die angegebenen Fehler aus der Aufgabenstellung entnommen.

2.2.3. e/m - Wert

Nun ergeben sich folgende Zahlenwerte für k_i:

$$k_1=1{,}112\cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}$$

$$k_2=1{,}118\cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}$$

Daraus folgt:

$$\Delta_{e/m}^{\text{stat}}(d_1)=0{,}080\cdot 10^{11}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\quad,\quad \Delta_{e/m}(d_1)=0{,}105\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{e}{m}(d_1)=(1{,}809\pm 0{,}080\pm 0{,}105)\cdot 10^{11}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

und

$$\Delta_{e/m}^{\text{stat}}(d_2)=0{,}020\cdot 10^{11}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\quad,\quad \Delta_{e/m}(d_2)=0{,}111\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{e}{m}(d_2)=(1{,}807\pm 0{,}020\pm 0{,}111)\cdot 10^{11}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

Bei diesem Versuch gab es die Schwierigkeit, dass es manchmal nicht möglich war, einen Punkt auf dem Schirm zu erzeugen. Die zwei Enden der Linie haben sich des öfteren nicht übereinander legen lassen, sonder sie sind „aneinander vorbei gelaufen". So mussten wir abschätzen, wann der Elektronenstrahl eine ganze Schraube durchflogen hat.

3. Fazit und Vergleiche

Beide Bestimmungsmöglichkeiten haben so ihre Tücken, jedoch ging die Methode nach Busch bedeutend schneller und wie es aussieht, ist diese auch genauer

Wir haben also drei verschiedene Werte für *e/m* erhalten, die wir nun mit dem Tabellenwert[1] vergleichen:

Fadenstrahlrohr	**Busch (d_1)**
$(1{,}240 \pm 0{,}001 \pm 0{,}193) \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$	$(1{,}809 \pm 0{,}080 \pm 0{,}105) \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$
Busch (d_2)	**Tabellenwert**
$(1{,}807 \pm 0{,}020 \pm 0{,}111) \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$	$1{,}7588202 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$

Leider liegt der Tabellenwert für den mit dem Fadenstrahlrohr gemessenen *e/m*-Werte nicht im Fehlerbereich. Die mit der Methode nach Busch Bestimmten passen aber recht gut und der Tabellenwert liegt auch im Fehlerbereich.

1 http://de.wikipedia.org/wiki/Spezifische_Ladung, 2.12.2009, 00:26 Uhr