Versuch P1-12,22,22 - Resonanz

Vorbereitung

Von Jan Oertlin

27. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

1. Drehpendel, freie Schwingung

Hier wird ein Drehpendel in eine freie Schwingung versetzt.
Über die Messung des zeitlichen Verlaufs des Phasenwinkels sollen die Winkelgeschwindigkeit und die kinetische Energie berechnet und in Diagrammen über der Zeit aufgetragen werden.

Bewegungsgleichung:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -D^* \varphi \, , \varphi = \varphi(t)$$

Wobei $M_1 = \Theta \ddot{\varphi}$ und $M_2 = D^* \varphi$ Drehmomente sind.
Eine Lösung der Bewegungsgleichung ist

$$\varphi = A \cos \omega t \, , \ \ \omega = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}} \ \ .$$

Daraus ergibt sich $\dot{\varphi}$ wie folgt:

$$\dot{\varphi} = -A \omega \sin(\omega t + \psi)$$

Die kinetische Energie berechnet sich durch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2$$

Dafür schätzen wir das Trägheitsmoment Θ wie folgt ab:

$$\Theta = \int_V \rho(\vec{x})(x^2 + y^2) d^3 x$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \int_0^h r^3 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi h (r_a^4 - r_i^4)$$

$$\approx 1{,}402 \cdot 10^{-3} \ \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

Die Periodendauer T lässt sich bestimmen durch:

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}}$$

Da das Drehpendel nicht völlig reibungsfrei gelagert werden kann, erfährt es eine Dämpfung. Dies führt zu einem weiteren Term in der Bewegungsgleichung:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -D^* \varphi - \gamma \dot{\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \;\; \omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta}, \;\; \beta = \frac{\gamma}{2\Theta}$$

Im Falle der hier vorliegenden schwachen Dämpfung $(\beta < \omega_0)$, ergibt sich folgende Lösung der Differentialgleichung:

$$\varphi = A\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

In diesem Fall wird die Schwingung des Drehpendels mit einer Wirbelstrombremse bei verschiedenen Stromstärken gedämpft.
Mittels dem aufgenommenen Winke-Zeit-Diagramm wird wieder wie in Aufgabe 1 der Wert für die Dämpfungskonstante bestimmt.
Dabei werden drei verschiedene Fälle betrachtet:

i. Schwache Dämpfung, vgl. Aufgabe 1
ii. Kriechfall $(\beta > \omega_0)$
Dafür ergibt sich folgende Lösung der Differentialgleichung:

$$\varphi = A\, e^{-\beta t} \left(c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}\right), \;\; \omega 0 \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$= A\, e^{-\beta t} \cosh \omega t$$

iii. Aperiodischer Grenzfall $(\beta = \omega_0)$
Dafür ergibt sich folgende Lösung:

$$\varphi = A(1 + Bt) e^{-\beta t}$$

neben der Bestimmungsmethode für β aus Aufgabe 1, soll β auch aus dem Dämpfungsverhältnis k bestimmt werden.
Dazu benötigen wir folgenden Zusammenhang:

$$\ln k = \ln \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} = \beta T$$

k erhält man auch durch diese Formeln:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}$$

$$k = \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Da im Fall i. Die Dämpfung hauptsächlich nur Einfluss auf die Amplitude hat, wirkt sich die Wirbelstrombremse kaum auf die Periodendauer aus.

Da, wie in Aufgabe 1 schon geschrieben, das Pendel nicht ganz reibungsfrei gelagert ist, muss man, um den Anteil von I_B an β zu erhalten, den β - Wert aus Aufgabe 1 abziehen:

$$\beta_\mathrm{korr}(I_\mathrm{B}) = \beta(I_\mathrm{B}) - \beta(0)$$

Da die Leistung der Spule proportional zu I_B^2 ist, ist auch β_korr proportional zu I_B^2 .
Daraus ergibt sich:

$$\beta_\mathrm{korr} = const \cdot I_\mathrm{B}^2$$

Für den Fall $\beta = \omega_0$ könnte man den I_B - Wert wie folgt extrapolieren:

$$I_\mathrm{B}^2 = \frac{\beta(I_\mathrm{B}) - \beta(0)}{const}$$

mit $\beta(I_\mathrm{B}) = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$.

3. Bestimmung der Winkelrichtgröße D*

Bestimmung von D^* :
Am Rad mit Kraft F_0 ziehe und Auslenkung φ messen.
D^* Übe folgende Formeln bestimmen:

$$M = D^* \varphi = |\vec{r} \times \vec{F}| = r\, m\, g \cos\varphi$$

$$\Rightarrow D^* = \frac{r\, m\, g \cos\varphi}{\varphi}$$

Das Trägheitsmoment lässt sich aus D^* und $T(0)$ bestimmen durch:

$$\frac{2\pi}{T(0)} = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}} \;\Rightarrow\; \Theta = \frac{D^*}{4\pi} T(0)$$

4. Erzwungene Schwingungen

Hier wird das Schwingrad von einem Exzenter bei verschiedenen Frequenzen beeinflusst. Dabei nehmen wir die Resonanzkurven $\varphi(\Omega)$ auf und beobachten und diskutieren die Phasenverschiebung ψ bei Frequenzen

1. weit unterhalb,
2. weit oberhalb und
3. genau bei

der Resonanzfrequenz.

Für erzwungene Schwingungen erhalten wir folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi}+2\beta\dot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=k\cos\Omega t$$

mit $k=\frac{M_0}{\Theta}$.

Deren Lösung ist:

$$\varphi=A_\mathrm{f}e^{-\beta t}\cos(\omega t+psi_\mathrm{f})+A_\mathrm{s}\cos(\Omega t+\psi_\mathrm{s})$$

Nach der Einschwingzeit ($e^{-\beta t}$ ist hinreichend klein geworden), erhalten wir ($\beta<\omega_0$):

$$\varphi=A\cos(\Omega t+\psi)$$

mit $A=\frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\beta\Omega)^2}}$ und $\psi=\arctan\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$.

Man sieht, dass das Schwingrad die Frequenz Ω des Exzenters annimmt, jedoch um die Phase ψ verschoben sein kann.

Im oben genannten Fall

1. ist $\Omega\ll\omega_0$, also $\psi=0$
2. ist $\Omega\gg\omega_0$, also $\psi=-\pi$
3. ist $\Omega=\omega_0$, also $\psi=-\pi/2$.

Für die Amplitude A gibt es die Fälle:

1. $\Omega=0 \Rightarrow A=\frac{k}{\omega_0^2}=\frac{M_0}{D^*}$
2. $\Omega=\omega_0 \Rightarrow$ je kleiner β, desto größer A
3. $\Omega\gg\omega_0 \Rightarrow$ die Amplitude nimmt mit $\frac{1}{\omega^2}$ ab.

Die Drehzahl des Exzenters wird nach der Einschwingzeit aus dem Winkel-Zeit-Diagramm abgelesen.

Außerdem bestimmen wir die Güte $Q(I_\mathrm{B})$ mit:

$$Q=\frac{\omega_0}{2\beta}\approx\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen

Hier werden Resonanzkurven $I(\omega)$ bei verschiedenen Dämpfungswiederständen R_p aufgenommen und die Amplitude und die Impedanz als Funktion der Frequenz dargestellt.
Des weiteren soll der Gütefaktor über die Resonanzbreite und über die Resonanzüberhöhung bestimmt werden. Die Resonanzüberhöhung wird in Spannungs-Frequenz-Diagrammen von Kondensator und Spule veranschaulicht.

Für den Schwingkreis aus *L*, *R* und *C* erhalten wir folgende Differentialgleichung:

$$U(t)=U_\mathrm{L}(t)+U_\mathrm{R}(t)+U_\mathrm{C}(t)$$

$$\Rightarrow\ \ddot{I}+\frac{R}{L}\dot{I}+\frac{1}{LC}I=\frac{1}{L}\dot{U}$$

deren homogene Lösung ist:

$$I(t)=I_0 e^{\frac{-R}{2L}t}\cos(\omega t+\psi)$$

mit $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$.

Nach einer gewissen Einschwingzeit haben wir nur noch die spezielle Lösung:

$$I(t)=I_0 e^{i\omega t+\psi}$$

Mit $\tan\psi=\frac{1}{R}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ und $I_0=U_0\left[\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega}C\right)^2}\right]^{-1}=\frac{U_0}{z}$. z ist dabei die Impedanz.

Die Impedanz wird im Resonanzfall $(\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}})$ minimal, I_0 maximal und $\psi=0$.

Der Gütefaktor wird errechnet aus:

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{\omega_0 L}{R}$$