Versuch P2 - 71,74: Kreisel

Vorbereitung

Von Jan Oertlin und Ingo Medebach

11. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Drehimpulserhaltung

Hier sollen wir die Drehimpulserhaltung in einem System ohne äußere Einflüsse demonstrieren. Dazu liegt uns ein Drehschemel und ein Fahrradkreisel bereit.

Da der Drehschemel nur Rotationen um die vertikale Achse (z-Achse) zulässt, gilt hier nur die Drehimpulserhaltung der vertikalen Achse, also $L_z = const$, wobei allgemein

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

gilt. Um dies zu zeigen, könnte man folgendes Versuchen:

- Man versetzt den Kreisel, dessen Achse entlang der z-Achse liegt, in Rotation, während man auf dem Drehschemel sitzt. Da die Drehimpulserhaltung gilt, fängt man an, sich in entgegengesetzter Richtung zu drehen.
- Die Person auf dem Drehschemel bekommt den bereits rotierenden Kreisel (Achse horizontal) in die Hand und durch Drehung der Achse in die Vertikale, wird sich die Person anfangen in entgegengestzte Richtung zum Kreisel zu drehen. Wird die Achse des Kreisels wieder in die Horizontale gebracht, wird die Person auf dem Drehschemel wieder ruhen.

2 Freie Achse

Nun untersuchen wir die Hauptträgheitsmomente einer „Zigarrenschachtel“. Dazu hat die Schachtel in der Mitte der Seitenflächen je eine Öse, woran wir diese an einen Elektromotor montieren können, der diese in Rotation um die jeweilige Achse versetzt.
Für die Rotation gelten die Eulergleichungen:

$$\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_3\omega_2 = M_1 \tag{1}$$
$$\Theta_2\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 = M_2 \tag{2}$$
$$\Theta_3\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_2\omega_1 = M_3 \tag{3}$$

Setzen wir hier ein konstantes ω_i ein, dann müssen ω_j mit $i \neq j$ verschwinden. Untersuchen wir nun die Stabilität der Rotation um ω_i (durch kleine Variationen von ω_j), erhalten wir

$$\ddot{\omega}_j + H\omega_j = 0$$

wobei

$$H = \prod_j \frac{\Theta_i - \Theta_j}{\Theta_j}\omega_i^2$$

ist. Nun kann man die Fälle $H < 0$ und $H > 0$ unterscheiden:

$H < 0$: Als Lösung ergibt sich ein exponentiell ansteigender Term. Somit ist die Rotation um diese Achse instabil. Außerdem ist dann das Trägheitsmoment das Mittlere der drei.

$H > 0$: Als Lösung ergibt sich eine harmonische Schwingung um die Gleichgewichtslage. Somit ist die Rotations um diese Achse stabil und das Trägheitsmoment ist entweder das größte oder das kleinste.

3 Kräftefreie Kreisel

Hier sollen wir bei einem kräftefreien Kreisel die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit der Drehfrequenz um die Figurenachse messen. Unter einem kräftefreien Kreisel versteht man einen Kreisel auf den keine äußeren Kräfte wirken. Dazu benutzen wir einen symmetrischen Kreisel. Dieser hat zwei gleiche Hauptträgheitsmomente. Er ist in einerm kardanschen Aufhängung montiert und dadurch im Schwerpunkt unterstützt. Wir sollen nun die Nutationsfrequenz messen. Nutation entsteht wenn Figurenachse und Rotationsachse unseres Kreisels nicht übereinstimmen. Bei einem kräftefreien Kreisel bewegt sich die Figurenachse auf einem Kreiskegel. Für kleine Öffnungswinkel des Nutationskegels gilt näherungsweise folgender Zusammenhang:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\Theta} \cdot \omega$$

mit der Nutationsfrequent ω_N, Rotationsfrequenz um die Figurenachse ω, Trägheitsmoment Θ_3 um die Figurenachse und Träheitsmoment Θ um die anderen beiden Achsen.
Da der Kreisel sich jedoch nicht ungehindert duch die Kardanrahmen nur um die Figurenachse drehen kann, müssen wir noch unsere Trägheitsmomente korrigieren. Es gilt:

$$\Theta_1^{korr} = \Theta + \Theta_1^{Innenkardan} + \Theta_1^{Außenkardan}$$

$$\Theta_2^{korr} = \Theta + \Theta_2^{Innenkardan}$$

Somit müssen wir noch Θ durch $\sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}$ ersetzen und erhalten:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}} \cdot \omega$$

Wir messen die Frequenzen mit einer optischen Apparatur. Dazu sind auch den Kreisel Reflexionsstreifen angebracht. Diese senden nur beim Lichtdurchgang einen Lichtstrahl zu unserer Messapparatur und somit kann die Rotationsfrequenz um die Figurenachse ω bestimmt werden. Die Nutationsfrequenz wird ähnlich bestimmt. Dazu richten wir mit einer Linse einen Lichtstrahl auf den Kardanrand. Bei einer Nutationsbewegung geht unsere Lichtstrahl am Rand vorbei und trifft auf unseren Detektor. Über die Anzahl der Detektierungen können wir auf die Nutationsfrequnz ω_N schließen

4 Dämpfung des Kreisels

Hier untersuchen wir die Dämpfung eines Kreisels. Dazu messen wir die Winkelgeschiwndigkeit in Abhängigkeit der Zeit. Wir erwarten, dass diese mit zunehmender Zeit wegen Reibungseffekten abnimmt. Zu erwarten ist eine exponentiell abfallende Kurve $\omega(t) = \omega_0 e^{\alpha t}$, wobei wir α durch eine Regressionsgerade durch $\ln \omega(t) = \ln \omega_0 + \alpha t$ bestimmen können.

5 Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente

Nun messen wir die Präzissionsfrequenz in Abhängigkeit der Drehfrequenz um die Figurenachse bei einem nutationsfreien, symmetrischen Kreisel unter dem Einfluss eines äußeren Drehmomentes. Dieses Drehmoment wird durch Gewichte, die am Kugellager des inneren Kardanrahmen befestigt werden, verursacht. Da die Figurenachse horizontal liegt, stehen das Drehmoment un der Drehimpuls senkrecht aufeinander:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \perp \quad \vec{L}$$

Aus

$$\vec{L}\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{L}^2 = 0$$

folgt, dass der Betrag des Drehimpulses konstant bleibt. Außerdem folgt aus

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G = mg \begin{pmatrix} r_y \\ -r_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, dass $L_z = const$ ist. Also ändern sich nur die x- und y-Komponente des Drehimpulses. Somit präzediert $\vec{L}$ um die Figurenachse des Kreisels mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_P, wobei ω_P gegeben ist durch

$$\omega_P = \frac{m \cdot g \cdot r}{\omega \cdot \Theta_3}$$

6 Hauptträgheitsmomente

Hier sollen wir aus den gemessenen Präzessions- und Nutationsfrequenzen die Hauptträgeheitsmomente unter Berücksichtigung der zusätzlichen Trägheitsmomente der Kardanrehmen. Ebenso soll auf die Masse des Kreisels (Rotors) geschlossen werden.
Dazu benutzen wir folgende Formel um das Trägheitsmoment Θ_3 um die Figurenachse zu bestimmen.

$$\omega_p = \frac{M}{\omega \cdot \Theta_3}$$

Dies formen wir um und erhalten:

$$\frac{M}{\omega_p} = \omega\Theta_3$$

Aus der Regressionsgrade des $\frac{M}{\omega_p}$ über ω Diagramms können wir Θ_3 bestimmen. Diese benutzen wir nun um Θ zu bestimmen. Wir benutzen aus Aufgabe 3 folgende Gleichung:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}} \cdot \omega$$

und formen diese um:

$$\Theta_3\omega = \sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}\omega_N$$

Nun können wir aus der Regressionsgrade $\sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}$ bestimmen. Über unsere Zusammenhänge aus Aufgabe 3 folgt nun:

$$\Theta_1\Theta_2 = \Theta^2 + \Theta(\Theta_2^I + \Theta_1^I + \Theta_1^A) + \Theta_1^A\Theta_2^I + \Theta_1^I\Theta_2^I$$

$$\Theta^2 + \Theta(\Theta_2^I + \Theta_1^I + \Theta_1^A) + \Theta_1^A\Theta_2^I + \Theta_1^I\Theta_2^I - \Theta_1\Theta_2 = 0$$

und somit erhalten wir:

$$\Theta_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

mit $b := \Theta_2^I + \Theta_1^I + \Theta_1^A$ und $c := \Theta_1^A \Theta_2^I + \Theta_1^I \Theta_2^I - \Theta_1 \Theta_2$.
Wir gehen davon aus, dass unser Kreisel aus einem homogenen Zylinder besteht. Es gilt für einen solchen Zylinder $\Theta_3 = \frac{1}{2} m \cdot R^2$. Über dieses Verhältnis können wir auf die Masse m schließen.

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Hier schauen wir uns die Funktionsweise eines Kreiselkompasses an. Dazu befestigen wir den inneren Kardanrahmen so, dass sich der Kreisel nur noch in der Horizontalen bewegen kann. Somit ist nun die Figurenachse und der Drehimpuls parallel zum Boden. Den Kreisel versetzen wir nun in Rotation und stellen ihn auf eine Drehscheibe. Da das Drehmoment ihn aus seiner horizontalen Lage bringen möchte (aber es nicht kann, weil wir diese Bewegungsrichtung mit der Arretierung verboten haben), passiert gar nichts (Entspricht dem Kreiselkompass am Nordpol). Nehmen wir nun den Holzkeil und stellen somit den Kreisel schräg, richtet sich die Figurenachse entlang der Steigung des Holzkeiles aus. Für einen Kreiselkompass gilt auf der Erdoberfläche:

$$\vec{M} = \vec{L}_{\text{Kreisel}} \times \vec{\omega}_{\text{Erde}}$$