

# Versuch P1-12,22,22 - Resonanz

# Auswertung

Von Ingo Medebach und Jan Oertlin

3. November 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Drehpendel, freie Schwingung.....</b>	<b>2</b>
1.1. Winkel-Zeit-Diagramm.....	2
1.2. Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm.....	3
1.3. Kinetische Energie-Zeit-Diagramm.....	3
1.4. Phasenraumdarstellung.....	4
1.5. Bestimmung der Periodendauer.....	4
<b>2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung.....</b>	<b>5</b>
2.1. Bestimmung der Güte.....	8
<b>3. Bestimmung der Winkelrichgröße <math>D^*</math>.....</b>	<b>9</b>
<b>4. Erzwungene Schwingungen.....</b>	<b>9</b>
<b>5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen.....</b>	<b>13</b>
5.1. Messung mit $R = 0 \Omega$ .....	13
5.2. Messung mit $R = 8,2 \Omega$ .....	14
5.3. Messung mit $R = 47 \Omega$ .....	15
5.4. Messung mit $R = 100 \Omega$ .....	16

# 1. Drehpendel, freie Schwingung

Wir haben das Drehpendel in Schwingung versetzt, ohne es explizit zu dämpfen (also ohne Wirbelstrombremse).

Die aus der Messung des Drehwinkels gewonnenen Daten, haben wir in vier Diagrammen aufbereitet:

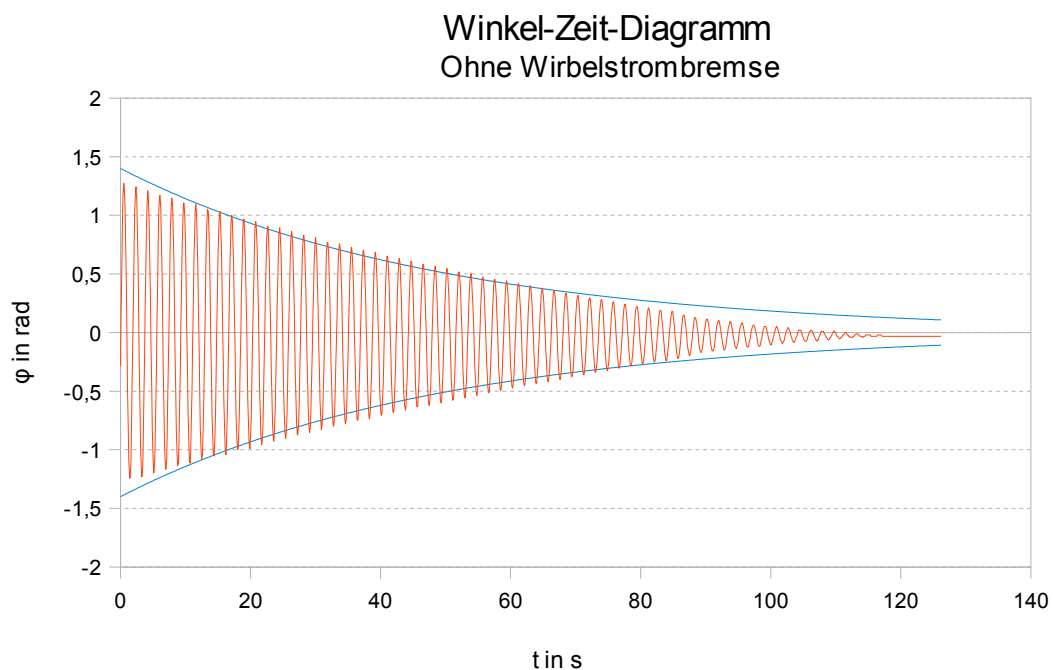
1. Winkel-Zeit-Diagramm
2. Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm
3. Kinetische Energie-Zeit-Diagramm
4. Phasenraumdarstellung

Da das Drehpendel nicht völlig Reibungsfrei gelagert werden kann, erfährt es eine schwache Dämpfung, was sich in einem exponentiellen Abfall der Amplitude zeigt. Die Schwingung kann mit folgender Gleichung beschrieben werden:

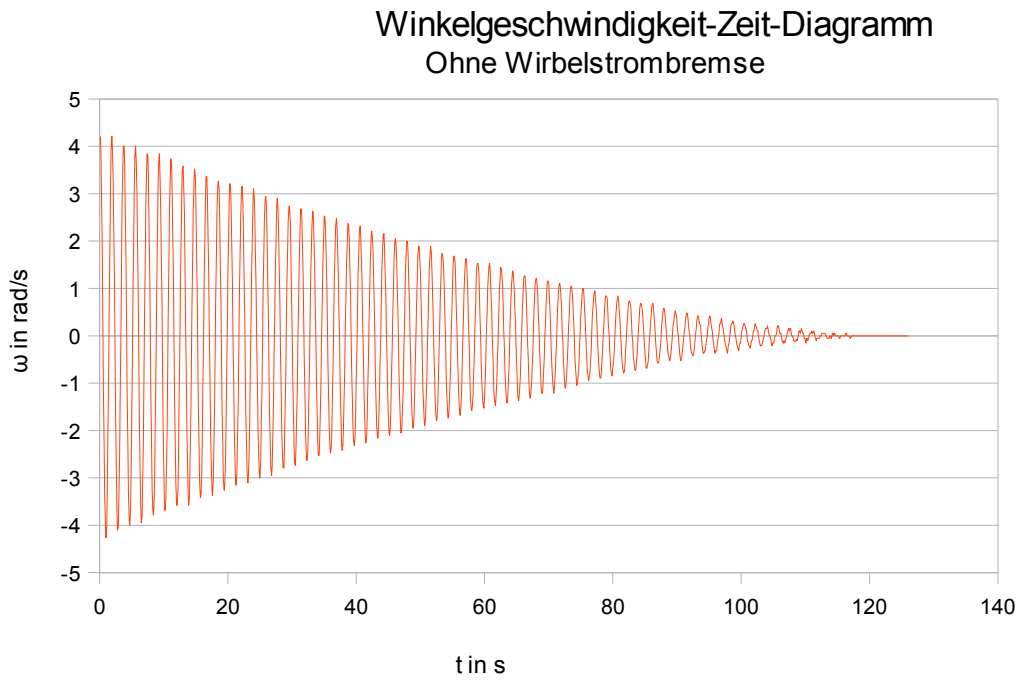
$$\phi(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

wobei  $e^{-\beta t}$  die Dämpfung beschreibt. Diese ist im ersten Diagramm in blau dargestellt mit  $\beta \approx 0,020 \text{ 1/s}$ . Die Kurve wurde hierbei mittels CASSY ermittelt.

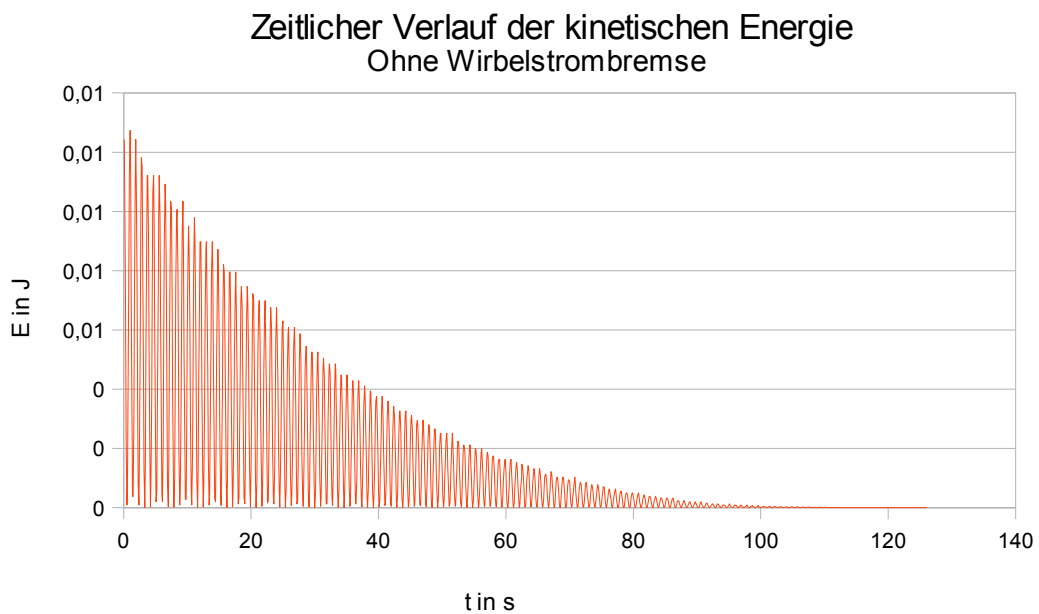
## 1.1. Winkel-Zeit-Diagramm



## 1.2. Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm



## 1.3. Kinetische Energie-Zeit-Diagramm



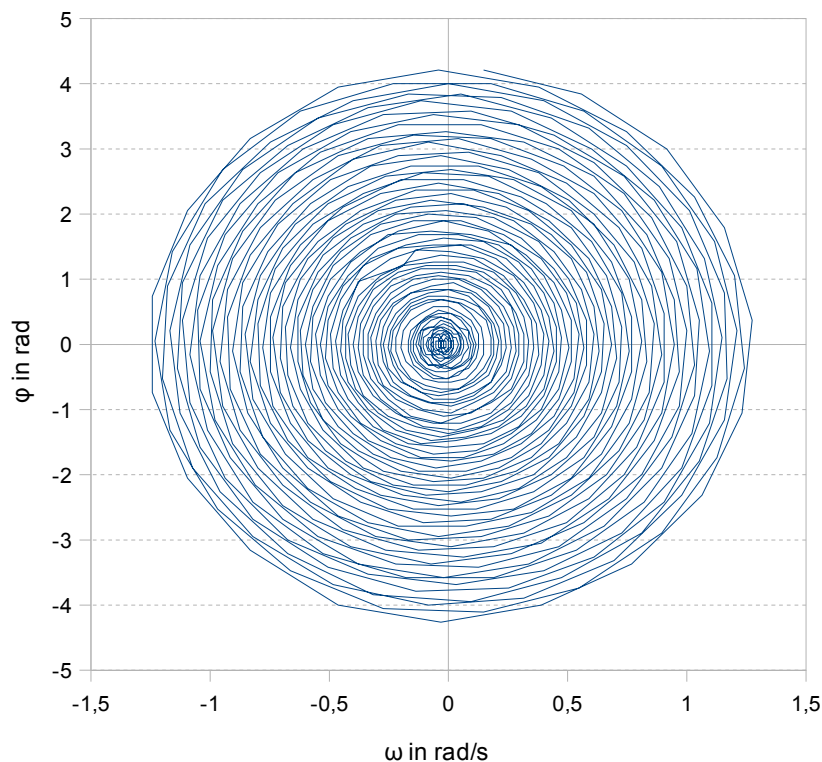
Wobei die kinetische Energie durch  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2$  berechnet wird. Dabei haben wir für das Trägheitsmoment folgende Abschätzung verwendet:

$$\Theta = \int_V \rho(\vec{x})(x_1^2 + x_2^2) d^3x = \rho \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \int_0^h r^3 d\varphi dr dz \approx 1,402 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 1.4. Phasenraumdarstellung

#### Phasenraumdarstellung

Ohne Wirbelstrombremse



### 1.5. Bestimmung der Periodendauer

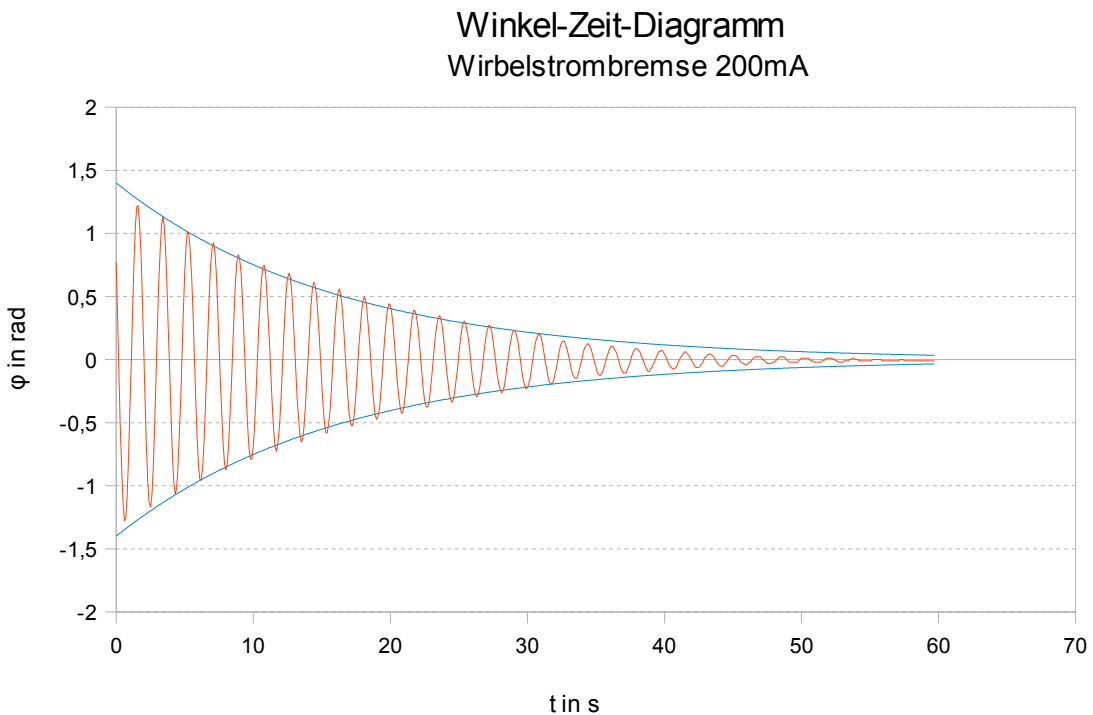
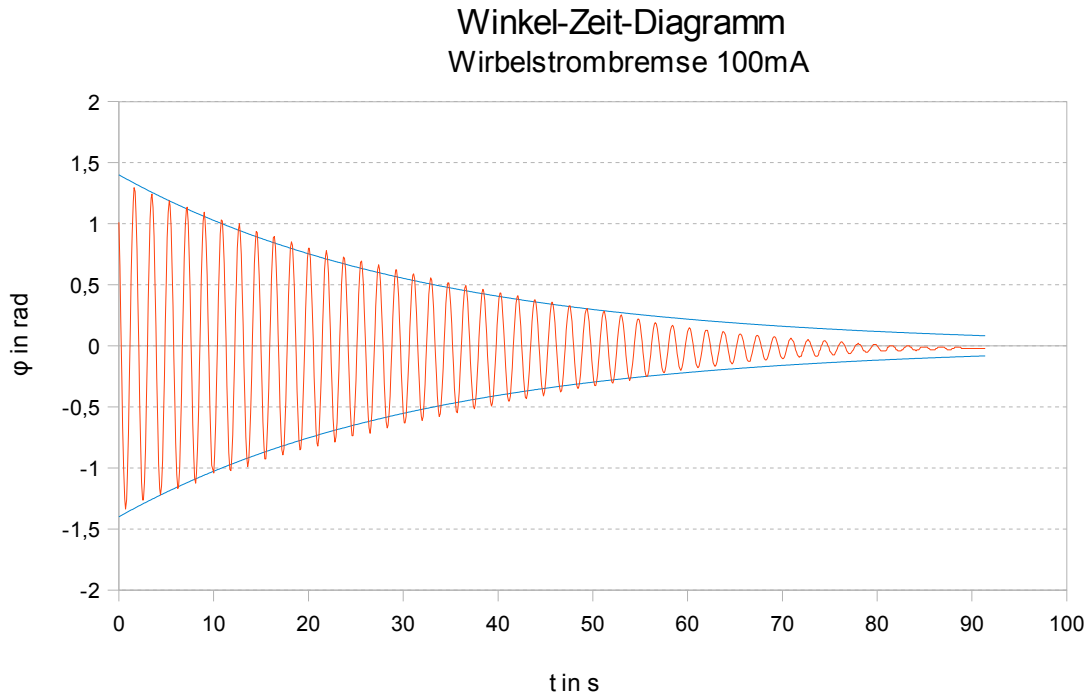
Die Periodendauer können wir durch Abzählen der Perioden im Winkel-Zeit-Diagramm und die dafür benötigte Zeit, bestimmen, indem wir die Zeit durch die Anzahl der Perioden teilen:  $T = \frac{\Delta T}{n}$

Die Periodendauer beläuft sich also auf rund  $T \approx \frac{23 \text{ s}}{12,5} = 1,84 \text{ s}$ .

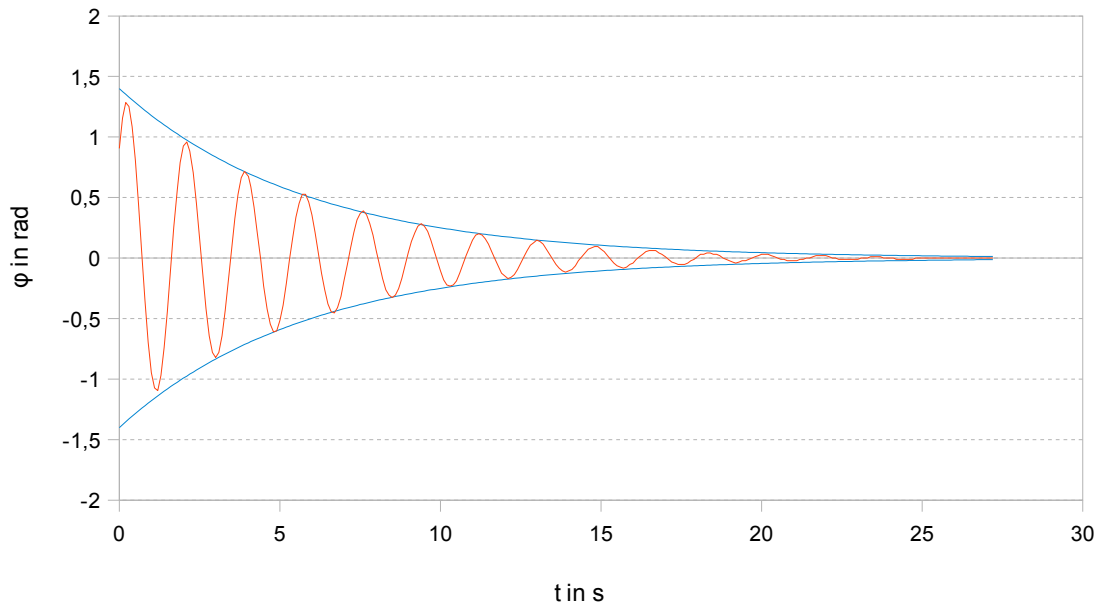
## 2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Nun dämpfen wir die Schwingung des Drehpendels mittels einer Wirbelstrombremse und nehmen bei verschiedenen Strömen  $I_B$  Winkel-Zeit-Diagramme auf.

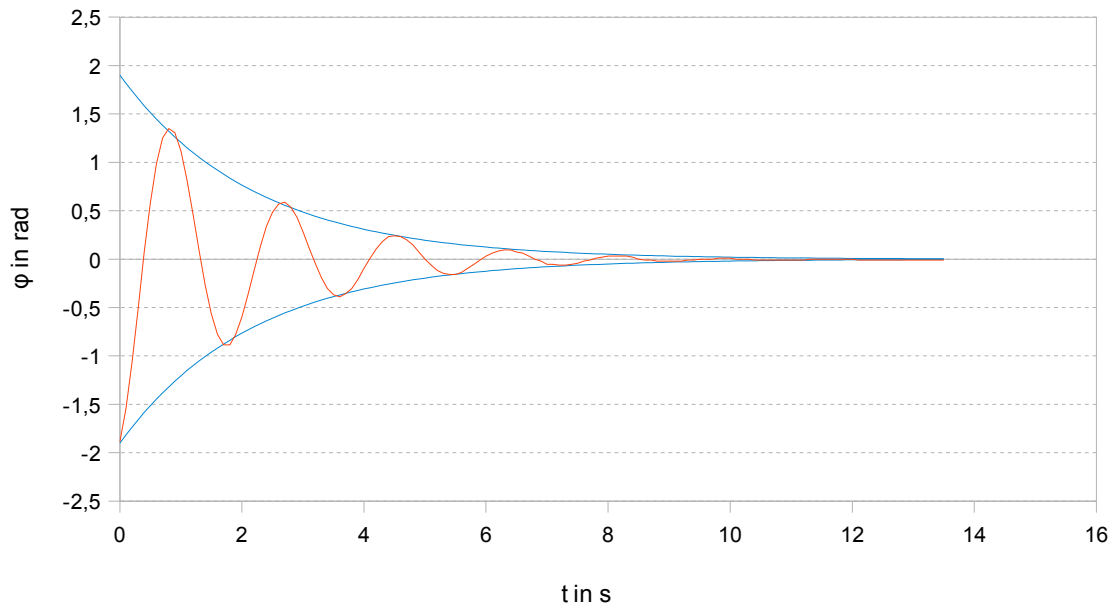
Wie in Aufgabe 1 haben wir mit CASSY die Dämpfungsfunktion ermittelt und in das Diagramm mit eingetragen.



Winkel-Zeit-Diagramm  
Wirbelstrombremse 400mA



Winkel-Zeit-Diagramm  
Wirbelstrombremse 700mA



Um nun den Anteil  $\beta_{\text{kor}}_{\text{r}}$ , der durch die Wirbelstrombremse hervorgerufen wird, aus  $\beta$  zu bestimmen, benutzen wir, den aus Aufgabe 1 gewonnenen Wert der Dämpfungskonstante.

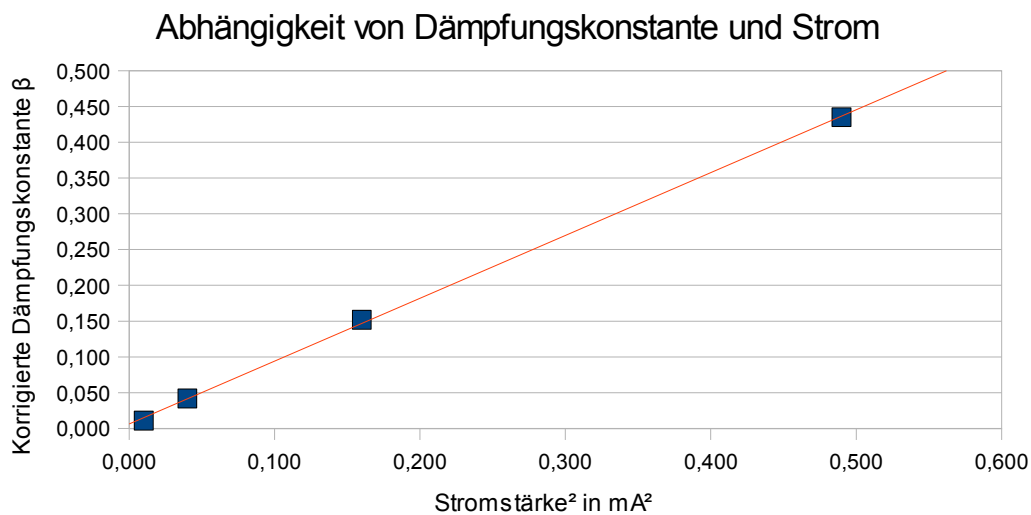
$$\beta_{\text{kor}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$$

mit  $\beta(0) \approx 0,020 \text{ 1/s}$  .

Im Folgenden werden nun die mit CASSY ermittelten Werte für  $\beta$ , deren korrigierten Werte und die Werte für  $\beta$  aus dem Dämpfungsverhältnis  $k$  aufgelistet, mit  $k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{i-1}}{\phi_i}$ .

	$I_B = 100 \text{ mA}$	$I_B = 200 \text{ mA}$	$I_B = 400 \text{ mA}$	$I_B = 700 \text{ mA}$
$\beta$ (aus CASSY)	0,031	0,062	0,172	0,455
$\beta_{\text{korr}}$	0,011	0,042	0,152	0,435
$\beta$ (aus $k$ )	0,029	0,073	0,185	0,480

Da  $\beta_{\text{korr}} = \text{const} \cdot I_B^2$  können wir den Wert für  $I_B$  für den aperiodischen Grenzfall extrapolieren. Dafür müssen wir zuerst  $\text{const}$  bestimmen. Dazu haben wir die Messdaten aus der obigen Tabelle in ein Diagramm aufgetragen und durch eine Regressionsgerade angenähert.



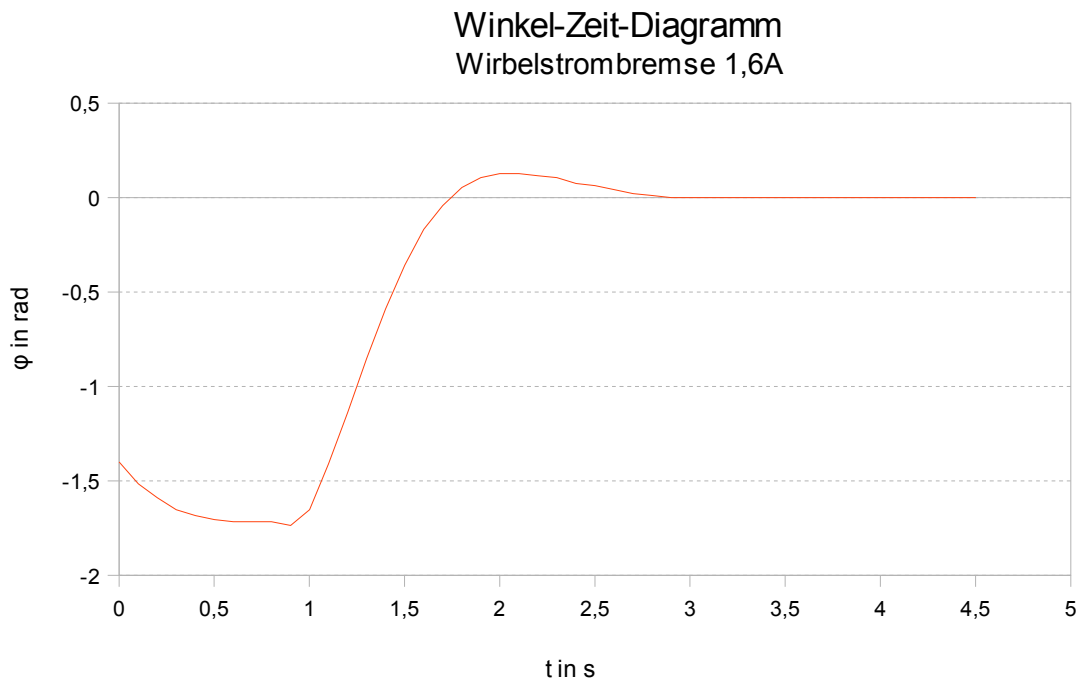
Somit ist  $\text{const} \approx 0,878$ . Da wir jedoch während des Praktikums falsche Achsenskalierungen gewählt hatten, haben wir für  $\text{const}$  einen Wert von rund 1 angenommen.

Den  $I_{B,\text{Grenz}}$ -Wert können wir nun wie folgt bestimmen:

$$I_{B,\text{Grenz}} = \sqrt{\frac{\omega_0 - \beta(0)}{\text{const}}}$$

Also erhalten wir für  $I_{B,\text{Grenz}} \approx 1,84 \text{ A}$ .

Da die Wirbelstrombremse nur max. 1,6 A verträgt, konnten wir nicht unseren extrapolierten  $I_B$ -Wert experimentell verifizieren. Deshalb wurde die nächste Messung bei 1,6 A durchgeführt. Aus dem Diagramm kann man aber die Nähe zum aperiodischen Grenzfall erkennen.

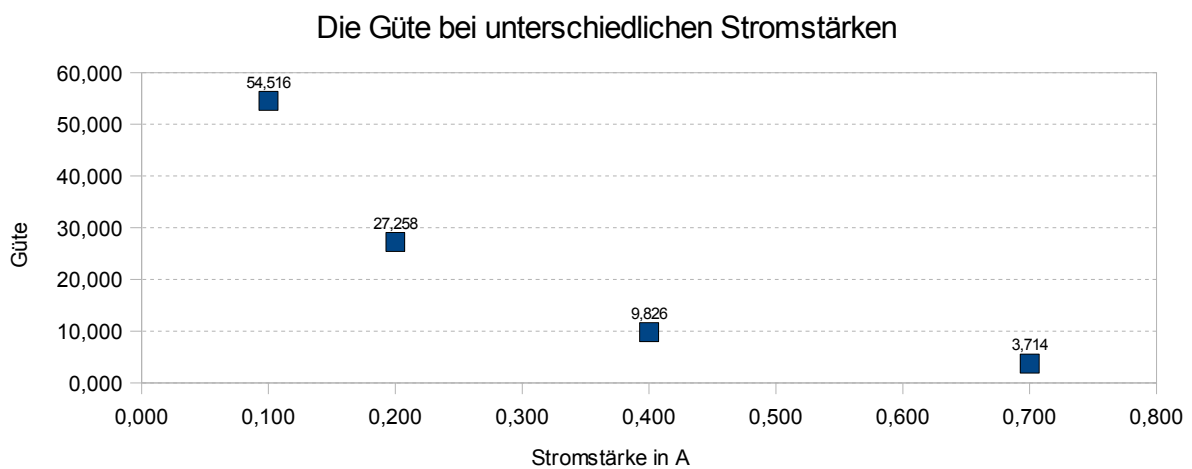


### 2.1. Bestimmung der Güte

Die Güte lässt sich näherungsweise bestimmen aus  $2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$ . Also erhalten wir:

$$Q(I_B) = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\beta(I_B) + \beta(0)}$$

Daraus lässt sich folgendes Diagramm erstellen:



**Begründung für  $\beta_{kor} = const \cdot I_B^2$**  : Siehe **Vorbereitung (Oertlin)** Seite 3, als auch auf der gleichen Seite in der **Vorbereitung von Medebach**.

**Begründung für minimale  $I_B$  – Abhängigkeit für  $T$** : Siehe Vorbereitung (Medebach) Seite 3.

**Gültigkeitsbereich für  $Q$** :

Der Gültigkeitsbereich kann über folgende Formel hergeleitet werden:

$$\Delta \omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$$

Damit der Ablesefehler für  $\Delta \omega$  gering ist, muss gelten:

$$\Delta \omega \ll 1$$

Daraus ergibt sich:

$$\Delta \omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \ll 1$$

mit

$$\omega_0 = 2\frac{\pi}{T} \Rightarrow 2\beta = 2\frac{\pi}{TQ} \ll 1$$

Damit folgt:  $\beta T \ll 1$  Also sollte  $\beta \ll 0,543$ , damit  $Q$  im Gültigkeitsbereich liegt.

### 3. Bestimmung der Winkelrichtgröße $D^*$

In Aufgabe 3 haben wir die Winkelrichtgröße  $D^*$  mit Hilfe eines Bekannten Drehmomentes bestimmt. Wir haben ein Gewicht der Masse  $m = 15$  g an das Pohlrad gehängt und die Auslenkung gemessen ( $\varphi \approx 0,7$  rad ).

Über die Drehmomente  $M = D^* \varphi = r F \cos(\varphi)$  folgt:

$$D^* = \frac{r F \cos(\varphi)}{\varphi} = \frac{0,09 \cdot 0,15 \cdot \cos(0,7)}{0,7} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} = 0,0179 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

Über die Schwingungsdauer  $T$  wird anschließend das Trägheitsmoment berechnet.

$$\Theta = \frac{D^*}{\omega_0^2} = \frac{D^*}{4\pi^2} T^2 = 1,535 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Das abgeschätzte Trägheitsmoment aus Aufgabe 1 lautete  $\Theta = 1,402 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  . Die Differenz könnte von den Speichen des Pohlrades kommen, die wir in Aufgabe 1 vernachlässigt haben.

### 4. Erzwungene Schwingungen

Hier wird das Pohlrad von einem Exzenter beeinflusst. Zusätzlich ist die Wirbelstrombremse angeschaltet. Es wird die Phasenverschiebung beobachtet und die Amplitude über den Frequenzen in einem Diagramm dargestellt.

Bei der Messung mit  $I_B = 0,2$  A beobachten wir, dass eine Phasenverschiebung in dem Frequenzbereich von 0,186 Hz bis 0,413 Hz kaum erkennbar ist und die Bewegung in Phase.

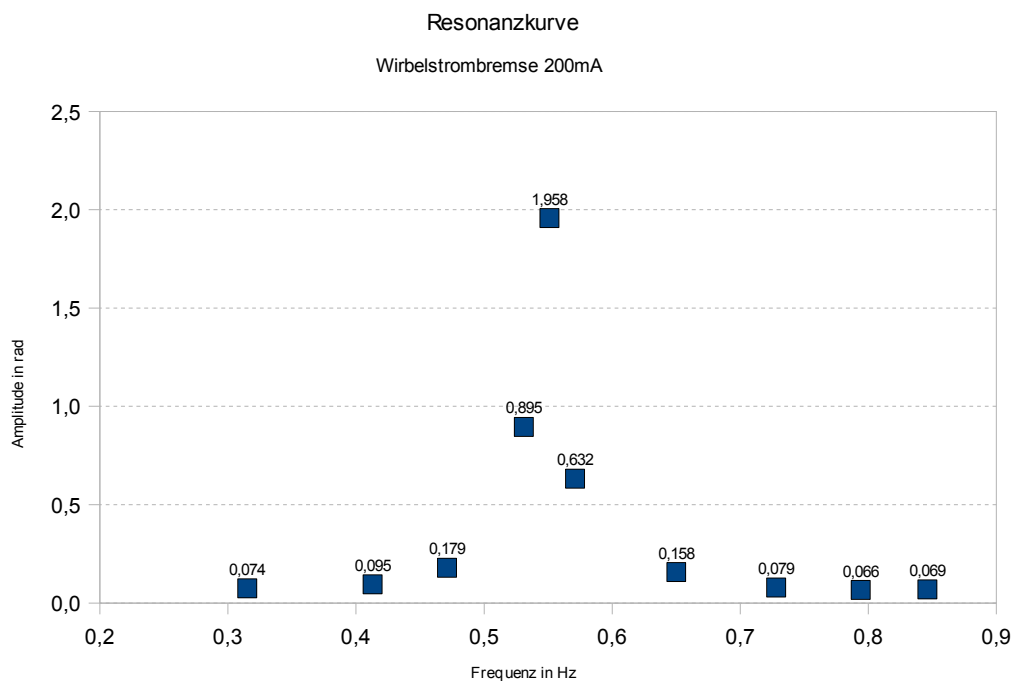
Anschließend ist die Phasenverschiebung leicht der Anregerfrequenz hinterher, bis sie schließlich bei einer Frequenz von 0,551 Hz um fast  $-\frac{\pi}{2}$  verschoben ist und es hier auch zur Resonanz kommt.

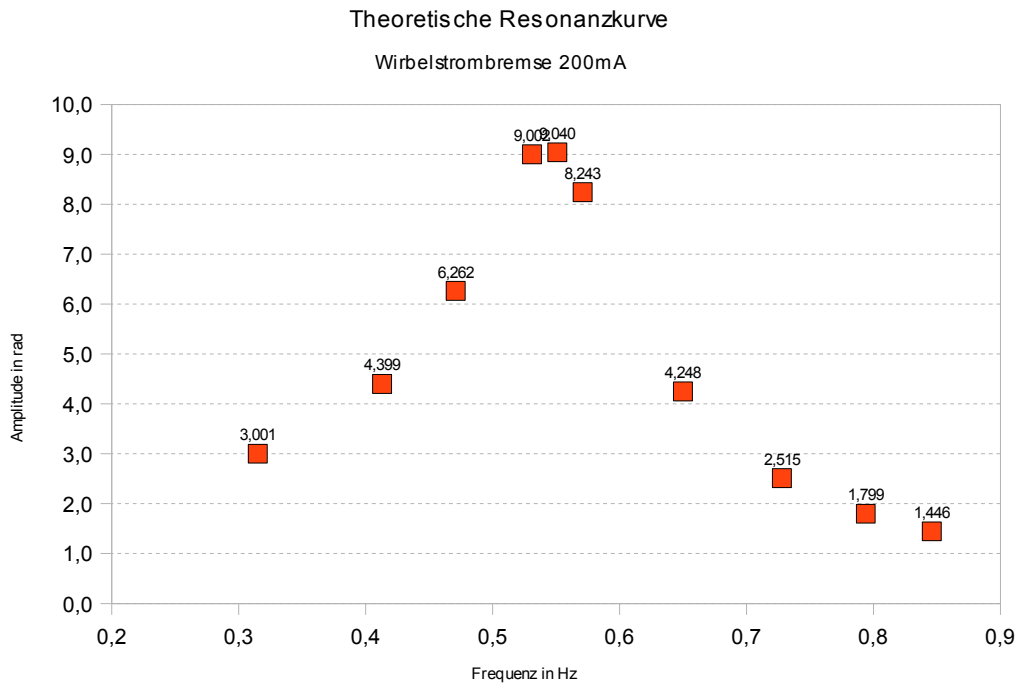
Nach dem Erhöhen der Frequenz über den Resonanzbereich nähert sich die Phasenverschiebung  $-\pi$  an. Es ist auch hier deutlich erkennbar, dass die Bewegung entgegen der Anregerfrequenz arbeitet.

Bei der Messung mit  $I_B=0,4\text{ A}$  ist der Ablauf der Phasenverschiebungen gleich nur die Frequenzbereiche sind verschoben:

- Keine erkennbare Phasenverschiebung bis 0,413 Hz
- Annäherung auf  $-\frac{\pi}{2}$  bis 0,512 Hz
- Resonanz mit fast  $-\frac{\pi}{2}$  bei 0,549 Hz
- Anschließend arbeitet die Schwingung dem Anreger entgegen.

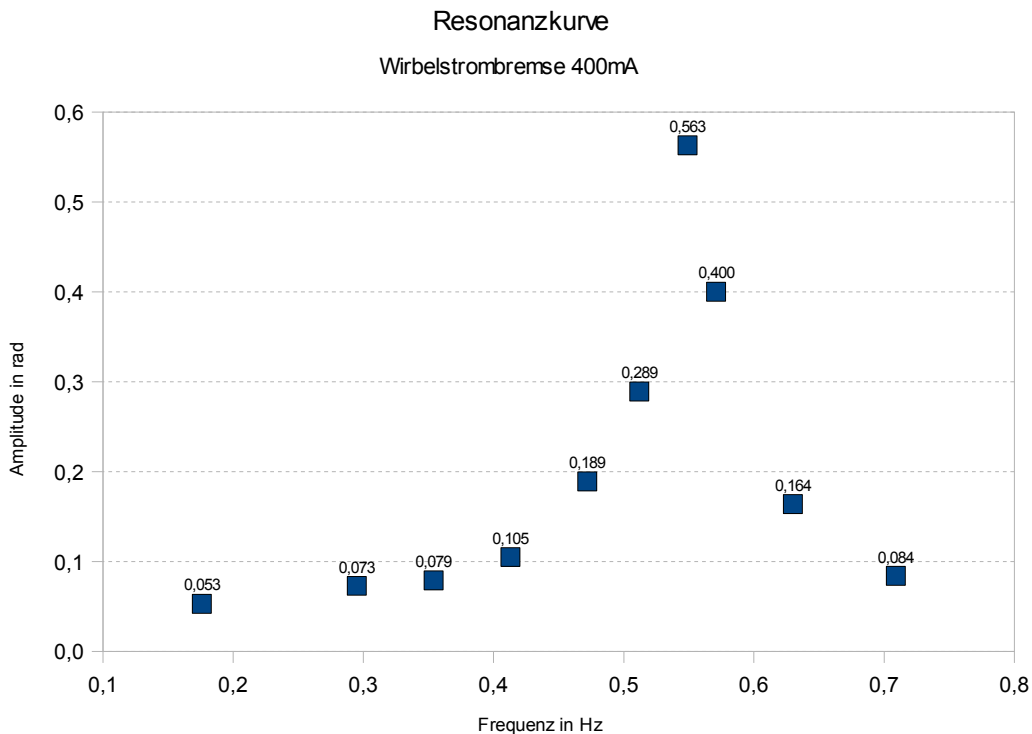
Die aufgenommenen Resonanzkurven:

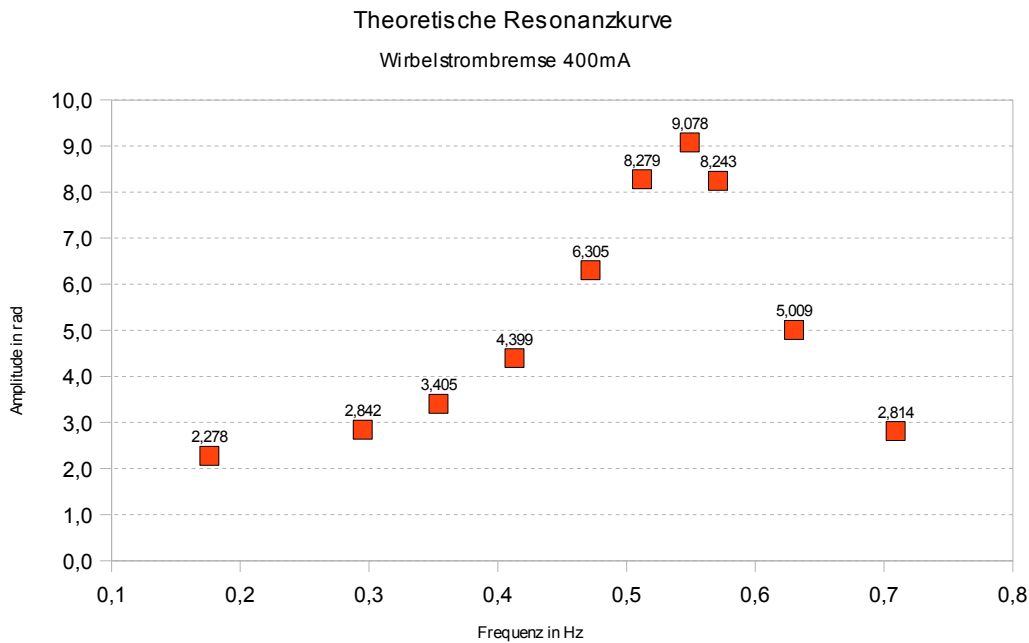




Wir vermuten, dass wir bei der Berechnung des theoretischen Verlaufs fehlerhafte Werte ( $\beta$ ,  $\omega_0$  oder  $k$ ) eingesetzt haben, uns aber nicht erklären können, welcher Wert nun falsch ist. Wir haben unsere Werte nochmals überprüft, sind aber auf die gleiche Kurve gekommen, für  $\varphi = 0,053$  rad (Messprotokoll, letzte Seite).

Unsere theoretischen Werte weisen eine große Diskrepanz zu den experimentell bestimmten auf.





Bei diesen theoretischen Werten hatten wir das gleiche Problem wie beim Fall mit der Wirbelstrombremse bei 200 mA.

Der theoretische Zusammenhang zwischen der Anregerschwingung und der Schwingung des Pohlschen Rades ist gegeben durch:

$$\varphi(t) = A \cos(\Omega t + \psi)$$

mit

$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

$$k = \frac{M_0}{\Theta}$$

$M_0$  erhalten wir durch  $M_0 = D^* \varphi \approx 9,487 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$  .

**Berechnung des Gütefaktors mittels  $1/\sqrt{2}$  - Amplitudenpunkte:**

$$Q_{200 \text{ mA}} \approx 13,73 \quad , \quad Q_{400 \text{ mA}} \approx 8,68$$

Die Gütefaktoren sind wegen wenigen Messpunkten leider auch sehr ungenau. Daher ist der Unterschied zu den Messwerten von **Aufgabe 2**. ( $Q_{200 \text{ mA}} = 27,258$  und  $Q_{400 \text{ mA}} = 9,826$ ) bei 200 mA groß. Bei 400 mA lagen die Messwerte zufällig günstiger.

## 5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen

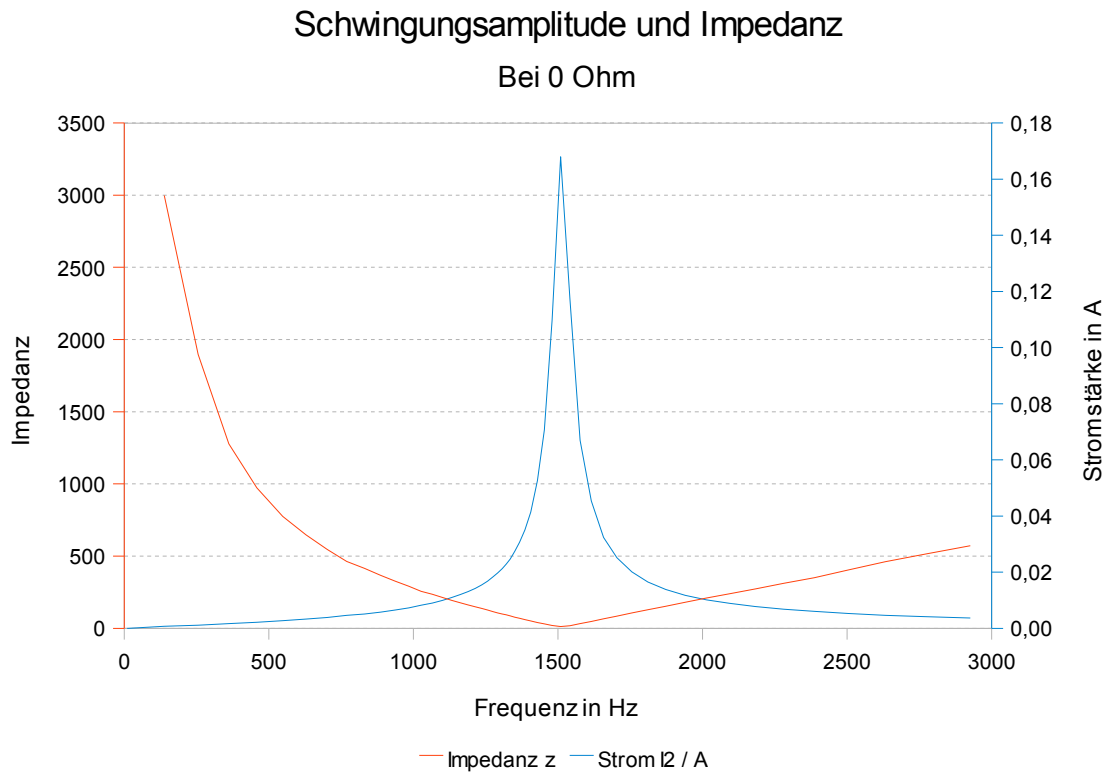
Hier handelt es sich um einem elektrischen Schwingkreis bestehend aus einer Spule, einem Kondensator und einem austauschbaren Widerstand. Dargestellt wird die Schwingungsamplitude und die Impedanz als Funktion der Frequenz.

Anschließend werden die Spannungsverläufe an Spule und Kondensator mit der anliegenden Spannung als Funktion der Frequenz gezeichnet.

Der Gütefaktor wird sowohl aus der Resonanzbreite als auch aus der Resonanzüberhöhung bestimmt.

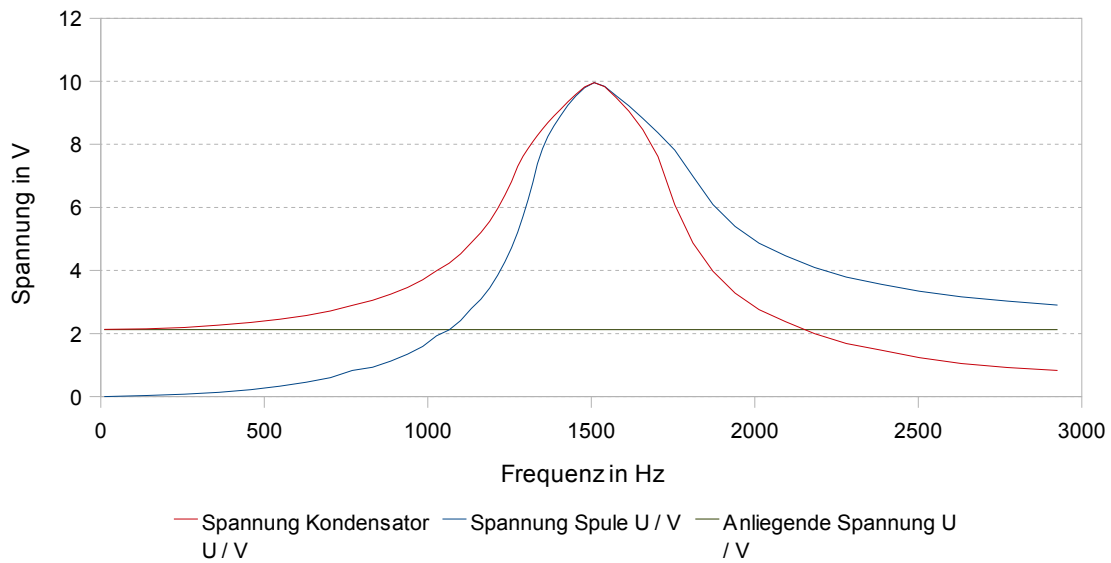
Die Güte aus der Resonanzüberhöhung aus Spulenspannung ergibt sich durch  $Q = \frac{U_L(\omega_{\text{Resonanz}})}{U_0}$ .

### 5.1. Messung mit $R = 0 \Omega$



## Spannungsverläufe

Bei 0 Ohm



Der Gütefaktor wird hier mittels  $\Delta f = 61,55 \text{ Hz}$  bestimmt:

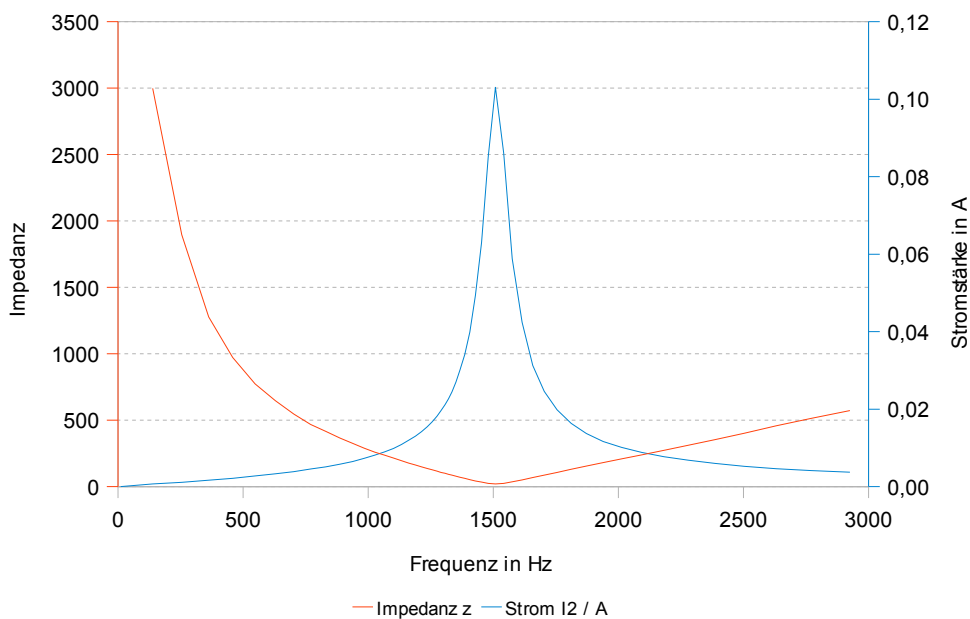
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \approx 20,5$$

Aus der Resonanzüberhöhung:  $Q \approx 4,70$

## 5.2. Messung mit $R = 8,2 \Omega$

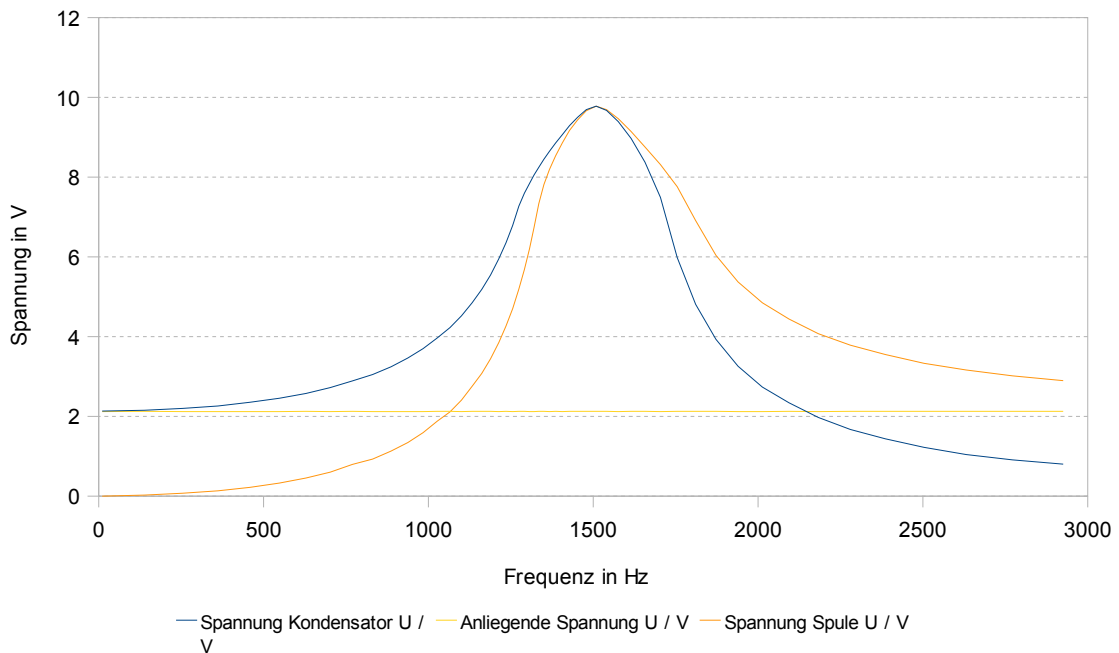
### Schwingungsamplitude und Impedanz

Bei 8,2 Ohm



## Spannungsverläufe

Bei 8,2 Ohm



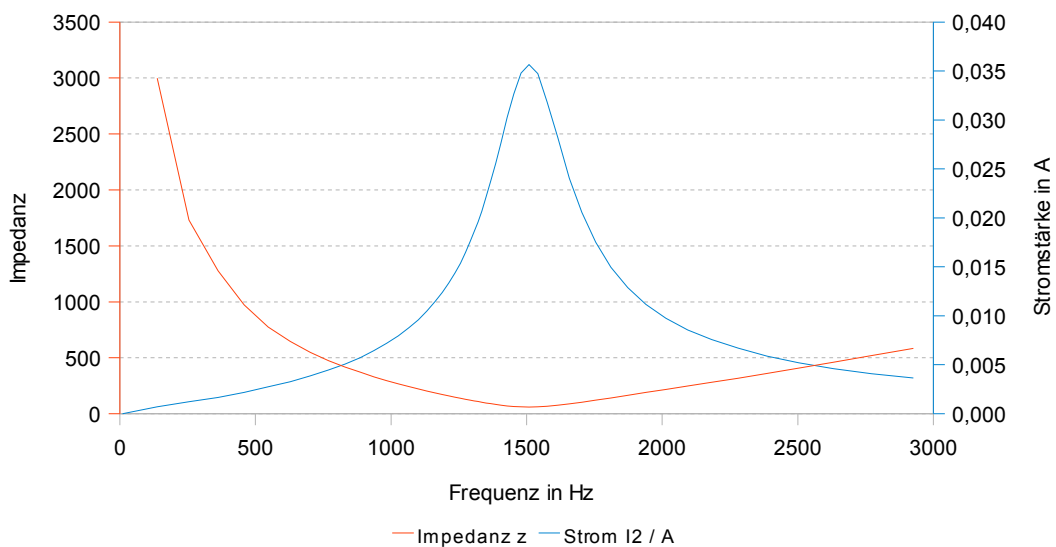
Der theoretischer Gütefaktor ist  $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 44,530$  , der gemessener  $Q \approx 10,7$  , mit  $\Delta f = 123,62$  Hz .

Aus der Resonanzüberhöhung:  $Q \approx 4,61$

### 5.3. Messung mit $R = 47 \Omega$

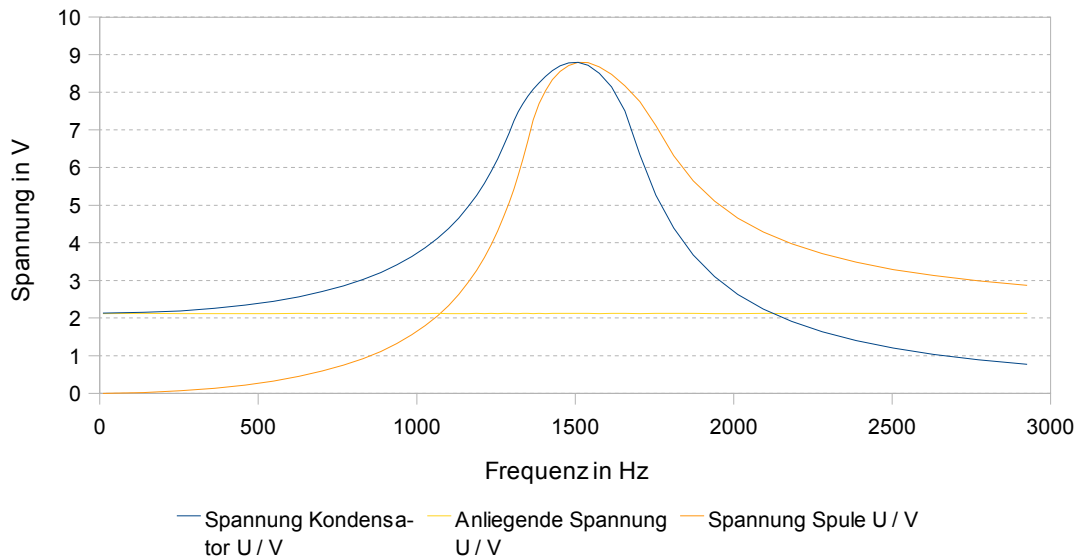
## Schwingungsamplitude und Impedanz

Bei 47 Ohm



## Spannungsverläufe

Bei 47 Ohm



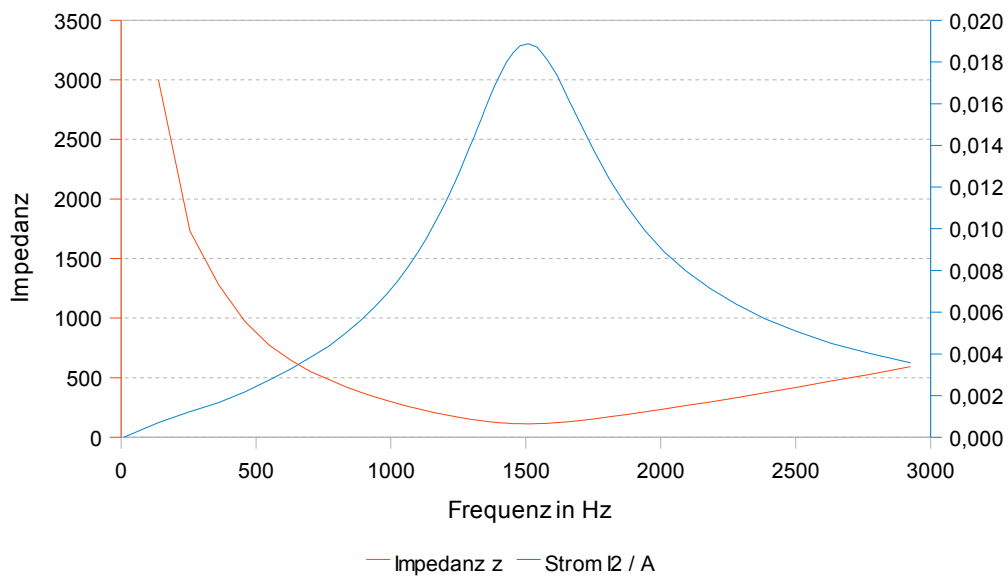
Der theoretischer Gütefaktor ist  $Q \approx 7,769$ , der gemessene  $Q \approx 4,86$ , mit  $\Delta f = 271,75$  Hz.

Aus der Resonanzüberhöhung:  $Q \approx 4,15$

### 5.4. Messung mit $R = 100 \Omega$

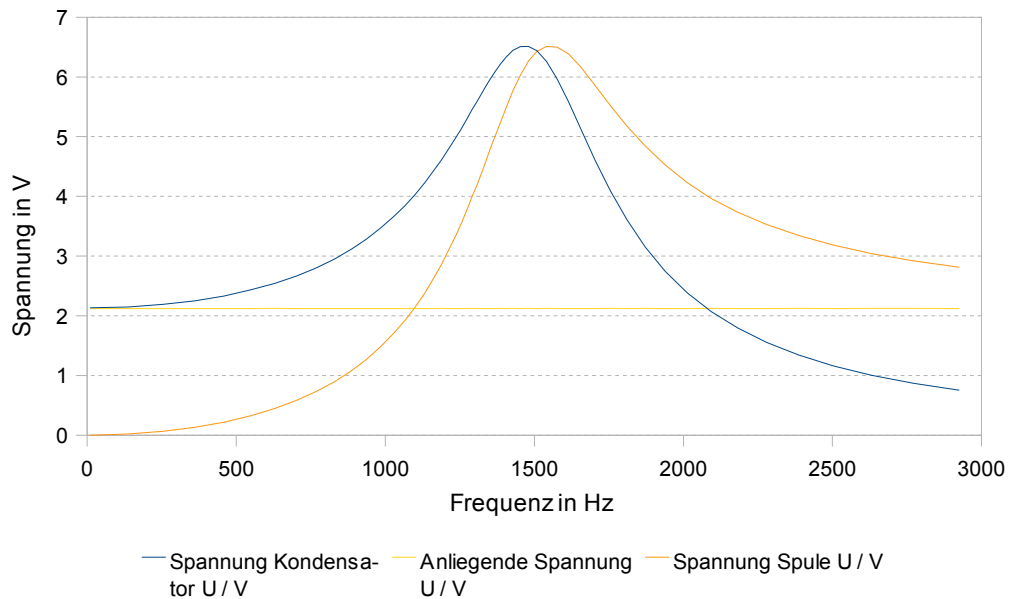
## Schwingungsamplitude und Impedanz

Bei 100 Ohm



## Spannungsverläufe

Bei 100 Ohm



Der theoretische Gütefaktor ist  $Q \approx 3,651$ , der gemessene  $Q \approx 2,75$ , mit  $\Delta f = 480,53$  Hz.

Aus der Resonanzüberhöhung:  $Q \approx 3,07$

Die unterschiedlichen Werte bei der theoretischen Gütebestimmung sowie der Messung könnte an dem vernachlässigten Widerständen der Kabeln liegen.